

اتحادها

اعمالی هستند که با توجه به آنها میتوان جمله و عبارات ریاضیاتی را مختصر و

راحت تر نوشت. انواع اتحادها به شرح زیر می باشند:

۱. اتحاد مربع دو جمله ای:

$$(جمله\ دوم)^2 + (جمله\ دوم) \pm 2(جمله\ اول)(جمله\ اول) \pm (جمله\ اول)^2$$

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

مثال

$$(x + 3)^2 = x^2 + 6x + 9$$

$$(4x + 1)^2 = 16x^2 + 8x + 1$$

$$(7x - 5)^2 = 49x^2 - 70x + 25$$

$$(3a + 2b)^2 = 9a^2 + 12ab + 4b^2$$

$$(-3a + 5b)^2 = 9a^2 - 30ab + 25b^2$$

$$(a - 5)^2 = a^2 - 10a + 25$$

$$(5x^2 + 2x)^2 = 25x^4 + 20x^3 + 4x^2$$

۲. اتحاد مربع سه جمله ای:

$$(جمله\ سوم)^2 + (جمله\ دوم)^2 + (جمله\ سوم)^2 + 2(اول)(دوم) + 2(اول)(سوم) + 2(دوم)(سوم)$$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

انواع اتحادها

مثال

$$(2x + 5y - 3z)^2 = 4x^2 + 25y^2 + 9z^2 + 20xy - 12xz - 30yz$$

$$(4a - b - 2c)^2 = 16a^2 + b^2 + 4c^2 - 8ab - 16ac + 4bc$$

$$(3a^2 - 2b^3 - 4c^4)^2 = 9a^4 + 4b^6 + 16c^8 - 12a^2b^3 + 24a^2c^4 - 16b^3c^4$$

۳. اتحاد مزدوج:

$$(جمله اول)^2 - (جمله دوم)^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

مثال

$$(x - 2)(x + 2) = x^2 - 4$$

$$(3x^2 - 4x)(3x^2 + 4x) = 9x^4 - 16x^2$$

$$(6a + 3b)(6a - 3b) = 36a^2 - 9b^2$$

$$(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) = (x^2 - 1)(x^2 + 1) = x^4 - 1$$

$$7x + \frac{3}{4} \left(7x - \frac{3}{4} \right) = 49x^2 - \frac{9}{16}$$

۴. اتحاد یک جمله مشترک:

$$(جمله مشترک)^2 + (جمع جملات غیر مشترک) (جمله مشترک) + (ضرب جملات غیر مشترک)$$

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

انواع اتحادها

مثال

$$(x + 5)(x + 3) = x^2 + 8x + 15$$

$$(x - 7)(x + 4) = x^2 - 3x - 28$$

$$(x - 4)(x - 5) = x^2 - 9x + 20$$

$$(2x - 5)(2x - 4) = 4x^2 - 18x + 20$$

$$(4x + 3)(4x - 1) = 16x^2 + 8x - 3$$

۵. اتحاد مجموع مکعبات دو جمله (اتحاد چاق و لاغر) :

$$(جمله اول)^3 \pm (جمله دوم)^3$$

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

مثال

$$(x + 2)(x^2 - 2x + 4) = x^3 + 8$$

$$(x - 4)(x^2 + 4x + 16) = x^3 - 64$$

$$(3x - 2y)(9x^2 + 6xy + 4y^2) = 27x^3 - 8y^3$$

۶. اتحاد مکعب دو جمله ای :

$$(جمع جملات) \pm (ضرب جملات)^3 \pm (جمله دوم)^3 \pm (جمله اول)^3$$

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3(ab)(a + b) = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$$

$$(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3(ab)(a - b) = a^3 - b^3 - 3a^2b + 3ab^2$$

انواع اتحادها

(مثال)

$$(x + 2)^3 = x^3 + 8 + 3(2x)(x + 2) = x^3 + 8 + 6x^2 + 12x$$

$$(2x - 3y)^3 = 8x^3 - 27y^3 - 3(6xy)(2x - 3y) = 8x^3 - 27y^3 - 36x^2y + 54xy^2$$

تمرین حاصل را به کمک اتحاد بدست آورید؟

$$(4x - 6)^2 = 16x^2 - 48x + 36$$

$$(7x + 2y)^2 = 49x^2 + 28xy + 4y^2$$

$$(x + y + 3z)^2 = x^2 + y^2 + 9z^2 + 2xy + 6xz + 6yz$$

$$(x - 7)(x - 2) = x^2 - 9x + 14$$

$$(4x - 5)(4x + 5) = 16x^2 - 25$$

$$\left(\frac{2}{3}a + \frac{1}{4}b\right)\left(\frac{2}{3}a - \frac{1}{4}b\right) = \frac{4}{9}a^2 - \frac{1}{4}b^2$$

$$(5x - 6)(5x + 2) = 25x^2 - 20x - 12$$

$$(x - 3)(x + 3)(x^2 + 9) = (x^2 - 9)(x^2 + 9) = x^4 - 81$$

$$(x - 2)(x + 2)(x^2 + 7) = (x^2 - 4)(x^2 + 7) = x^4 + 3x^2 - 28$$

$$(3x - 2)(3x + 2) = 9x^2 - 4$$

$$(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) = 8x^3 - 1$$

$$(x - 3)^2 - (x + 3)^2 = (x^2 - 6x + 9) - (x^2 + 6x + 9) = -12x$$

$$(x - 2)(x + 5) - (x - 3)(x + 3) = (x^2 + 3x - 10) - (x^2 - 9) = 3x - 1$$

$$(2x + 3)^3 = 8x^3 + 27 + 3(6x)(2x + 3) = 8x^3 + 27 + 36x^2 + 54x$$

انواع اتحادها

✓ چند نکته از اتحادها:

$$۱. x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$$

$$۲. x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy$$

$$۳. (x + y)^2 - (x - y)^2 = 4xy$$

$$۴. (x - y)^2 - (x + y)^2 = -4xy$$

$$۵. x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y)$$

$$۶. x^3 - y^3 = (x - y)^3 + 3xy(x - y)$$

$$۷. x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)$$

$$۸. \begin{cases} \text{if } x = y = z \\ \text{or} \\ \text{if } x + y + z = 0 \end{cases} \implies x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$$

نکته ۱) فرمول شماره ۱ و ۲ تعمیم اتحاد مربع دو جمله ای می باشند.

نکته ۲) فرمول شماره ۵ و ۶ تعمیم اتحاد مکعب دو جمله ای می باشند.

انواع اتحادها

تمرین) اگر $x + y = 10$ و $xy = 5$ باشد، حاصل $x^2 + y^2$ را بدست آورید.

جواب = با توجه به فرمول شماره ۱ داریم:

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = (10)^2 - 2(5) = 100 - 10 = 90$$

تمرین) اگر $a - b = 8$ و $ab = 6$ باشد، حاصل $a^2 + b^2$ را بدست آورید.

جواب = با توجه به فرمول شماره ۲ داریم:

$$x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy = (8)^2 + 2(6) = 64 + 12 = 76$$

تمرین) اگر $x + \frac{1}{x} = 5$ باشد، حاصل $x^2 + \frac{1}{x^2}$ را بدست آورید.

جواب = با توجه به فرمول شماره ۱ داریم:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(x \times \frac{1}{x}\right) = (5)^2 - 2(1) = 25 - 2 = 23$$

تمرین) اگر $x - \frac{1}{x} = 4$ باشد، حاصل $x^2 + \frac{1}{x^2}$ را بدست آورید.

جواب = با توجه به فرمول شماره ۲ داریم:

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2\left(x \times \frac{1}{x}\right) = (4)^2 + 2(1) = 16 + 2 = 18$$

تمرین) اگر $x + y = 3$ و $xy = 5$ باشد، حاصل $x^3 + y^3$ را بدست آورید.

جواب = با توجه به فرمول شماره ۵ داریم:

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = (3)^3 - 3(5)(3) = 27 - 45 = -18$$

تمرین) اگر $x - y = 5$ و $xy = 4$ باشد، حاصل $x^3 - y^3$ را بدست آورید.

جواب = با توجه به فرمول شماره ۶ داریم:

$$x^3 - y^3 = (x - y)^3 + 3xy(x - y) = (5)^3 + 3(4)(5) = 125 + 60 = 185$$

انواع اتحادها

تمرین) اگر $x + \frac{1}{x} = 10$ باشد، حاصل $x^3 + \frac{1}{x^3}$ را بدست آورید.

جواب = با توجه به فرمول شماره ۵ داریم:

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x \times \frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = (10)^3 - 3(1)(10) = 1000 - 30 = 970$$

تمرین) اگر $x - \frac{1}{x} = 4$ باشد، حاصل $x^3 - \frac{1}{x^3}$ را بدست آورید.

جواب = با توجه به فرمول شماره ۶ داریم:

$$x^3 - \frac{1}{x^3} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^3 + 3\left(x \times \frac{1}{x}\right)\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

$$x^3 - \frac{1}{x^3} = (4)^3 + 3(1)(4) = 64 + 12 = 76$$

تمرین) حاصل را به کمک اتحاد بدست آورید؟

$$25^2 - 15^2 = (25 - 15)(25 + 15) = 10 \times 40 = 400$$

$$140^2 - 60^2 = (140 - 60)(140 + 60) = 80 \times 200 = 16000$$

$$47 \times 33 = (40 + 7)(40 - 7) = 40^2 - 7^2 = 1600 - 49 = 1551$$

$$82 \times 98 = (90 - 8)(90 + 8) = 90^2 - 8^2 = 8100 - 64 = 8036$$

$$53^2 - 50^2 - 3^2 = (50 + 3)^2 - 50^2 - 3^2 = 300$$

$$76^2 - 70^2 - 6^2 = (70 + 6)^2 - 70^2 - 6^2 = 840$$