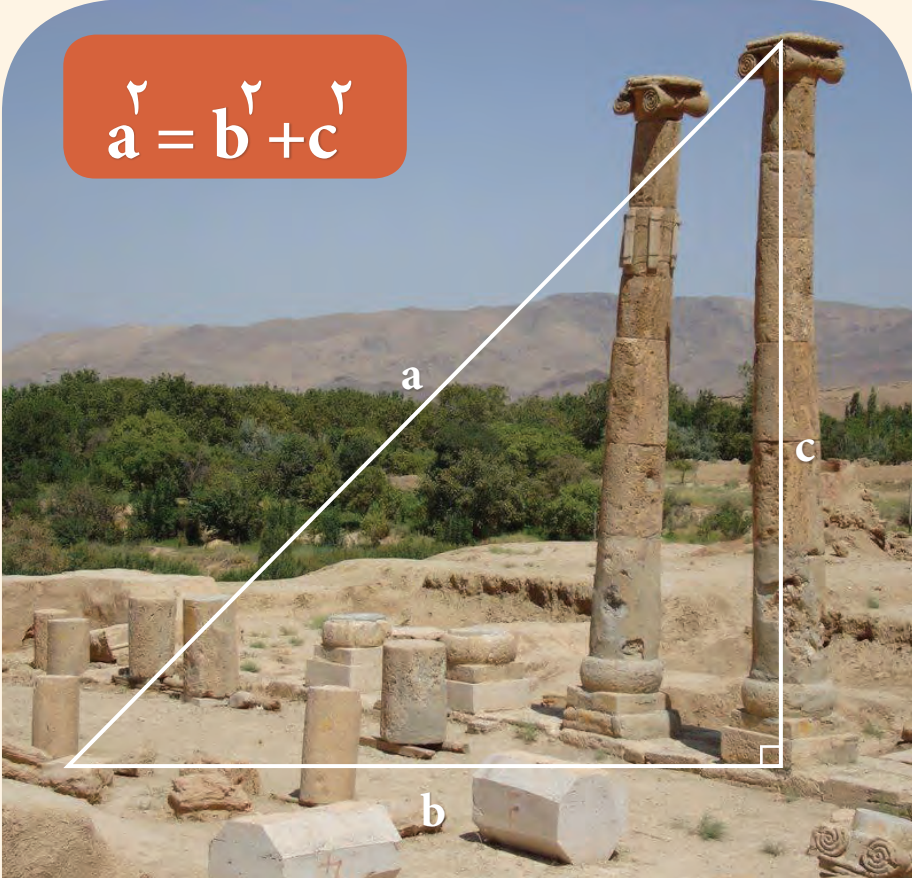




عبارت‌های جبری

$$a^2 = b^2 + c^2$$



عبارت‌های جبری کاربردهای فراوانی دارند. به‌طور مثال رابطه فیثاغورس در مثلث‌های قائم‌الزاویه یک تساوی بین دو عبارت جبری است که از آن در محاسبات هندسی استفاده می‌شود.

هر عبارت را، که به صورت حاصل ضرب یک عدد حقیقی در توان های صحیح و نامنفی یک یا چند متغیر باشد، تک جمله ای^۱ (یک جمله ای) می نامیم.
عبارت های زیر همگی تک جمله ای هستند.

$$7, x, 5x^3, -\sqrt{3}a^3x^2z, \frac{1}{5}xy, \pi x^2, 4z, -\frac{2}{v}$$

و عبارت های زیر تک جمله ای نیستند.

$$\frac{1}{x}, 3^x, 2\sqrt{x}, |x|, 2x^2+2x, \sqrt[3]{y}, 1+x$$

هرگاه قسمت های حرفی دو یا چند تک جمله ای یکسان باشند، به آنها تک جمله ای های متشابه گفته می شود؛ به عنوان مثال تک جمله ای های $4x^2y$ و $\frac{5}{4}x^2y$ و $-3x^2y$ متشابه اند، اما تک جمله ای های $3x^2$ و $3x$ متشابه نیستند.

۱- حاصل عبارت های زیر را مانند نمونه به دست آورید:

$$۱) 2(-4x \times 7x^2) = 2(-28x^3) = -56x^3$$

$$۲) \left(\frac{2}{3}x^2y\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot (x^2)^3 \cdot y^3 = \frac{8}{27}x^6y^3$$

$$۳) (-3x^3)^2 \left(\frac{1}{3}x^2\right)^3 =$$

$$۴) \left(\frac{1}{2}a^2b\right)(ab)\left(\frac{-2}{v}a^2c^5\right) =$$

$$۵) 2(5xy^4)^2(-2x^5y^2) =$$

$$۶) (2x^2y)(3x^2y^2) + xy^2(-5x^2y) =$$

در تک جمله ای $5a^2x^2y$ ، توان متغیر a برابر با ۲ است؛ بنابراین درجه این تک جمله ای نسبت به متغیر a ، برابر با ۲ است؛ به همین ترتیب درجه نسبت به x ، ۳ و درجه نسبت به y ، ۱ است. درجه نسبت به دو متغیر x و y را برابر با $4 = 3 + 1$ تعریف می کنیم.

۲- جدول زیر را مانند نمونه کامل کنید.

تک جمله‌ای	متغیرها	درجه نسبت به x	درجه نسبت به y	درجه نسبت به x و y
$\sqrt{3}a^3x^2y^4$	a, x, y	۲	۴	۲+۴=۶
$5x^4y^3z^2$				
$-12x^2u$				
$\frac{3}{5}$				

تک جمله‌ای‌های $3x^2y^3$ و $5x^2y^2$ را که متشابه نیستند، تک جمله‌ای‌های غیرمتشابه می‌گوییم. چنانچه تعدادی تک جمله‌ای را با یکدیگر جمع جبری (جمع یا تفریق) کنیم، حاصل، چند جمله‌ای است. چند جمله‌ای می‌تواند تک جمله‌ای یا جمع جبری چند تک جمله‌ای غیرمتشابه باشد؛ مانند:

$$4x^2 - 4x + 1, \quad x^2 - 2x, \quad \frac{2}{3}ax^2y - \frac{3}{2}axy^2 - axy, \quad 3x^4$$

در هر چند جمله‌ای، درجه نسبت به یک متغیر را برابر با بزرگ‌ترین درجه نسبت به آن متغیر تعریف می‌کنیم؛ برای مثال در چند جمله‌ای $-2xy^2 + x^2y - 1$ ، درجه نسبت به x برابر با ۲ و درجه نسبت به y برابر با ۳ است. همچنین درجه نسبت به چند متغیر را، بزرگ‌ترین درجه تک جمله‌ای‌های آن نسبت به متغیرهای موردنظر تعریف می‌کنیم. در این مثال درجه نسبت به x و y برابر با ۴ است. معمولاً در چند جمله‌ای‌ها، جملات را نسبت به توان‌های نزولی (از بزرگ به کوچک) یک متغیر مرتب می‌کنند.

۳- چند جمله‌ای‌های زیر را مانند نمونه نسبت به متغیر x مرتب کنید:

الف) $3x^2 + 5 - 2x + 2x^2 = 2x^2 + 3x^2 - 2x + 5$

ب) $-3bxy^2 + ax^2y - 4bx^2y^2$ ج) $\frac{1}{4}x^2y^2 - 2xy^3 + 3x^3y - 4$

کار در کلاس

عبارت‌های جبری زیر را ساده و سپس آنها را نسبت به توان‌های نزولی x مرتب کنید.

الف) $-5a^2 - 3ax + x^2 - (4x^2 + 5ax - 3a^2)$

ب) $-5a^2 - 3ax + x^2 - [4a^2 + 5ax - (3a^2 - 8ax)]$

ج) $(4x + 5x^2)(x^2 - x + 1) =$

د) $(x + x^2)(x^2 + x^2 + 1) =$

هـ) $(x^2 - 2x + 1)(x^2 + x^2 - 2) =$

۱- به ازای مقادیر داده شده برای x ، جدول زیر را کامل کنید :

x	x ²	6x	x ² +6x+9	(x+3) ²
۰				
۵				
$\frac{3}{2}$				

مقدارهای دو ستون آخر جدول را با هم مقایسه کنید؛ نتیجه چیست؟

حاصل عبارت‌های جدول را برای چند مقدار دیگر x ادامه دهید.

با توجه به مقادیر به دست آمده در دو ستون آخر جدول، چه حدسی می‌زنید؟

حاصل عبارت جبری $(x+3)^2$ را به دست آورید و آن را با عبارت جبری x^2+6x+9 مقایسه کنید.

$$(x+3)^2 = (x+3)(x+3) = \underline{\hspace{2cm}}$$

اگر دو عبارت جبری به گونه‌ای باشند که به ازای هر مقدار برای متغیرهایشان حاصل

یکسانی داشته باشند، برابری جبری حاصل از آنها را اتحاد جبری می‌نامیم.

بنابراین برابری $x^2+6x+9 = (x+3)^2$ یک اتحاد است.

برابری $3x-3 = x+1$ را در نظر بگیرید. مقدار دو طرف تساوی را به ازای $x=2$ ، به دست آورید.

آیا این برابری یک اتحاد است؟ برقراری این تساوی را به ازای چند مقدار دیگر برای x بررسی کنید.

همان طور که می‌دانید، به چنین برابری‌هایی معادله گفته می‌شود.

۲- حاصل عبارت‌های زیر را مانند نمونه به دست آورید.

الف) $(a+4)^2 = (a+4)(a+4) = a^2 + 4a + 4a + 16 = a^2 + 8a + 16$

$$\text{ب) } (5x+2)^2 = (\quad + \quad)(\quad + \quad) = \quad + \quad + \quad = 25x^2 + 20x + 4$$

$$\text{ج) } (a+b)^2 = (\quad + \quad)(\quad + \quad) = \quad + \quad + \quad = a^2 + 2ab + b^2$$

۳- با دقت در برابری $(5x+2)^2 = 25x^2 + 20x + 4$ ، که در فعالیت ۲ به دست آمده است، به

سؤال‌های زیر پاسخ دهید :

– جمله اول سمت راست برابری؛ یعنی $25x^2$ ، چه رابطه‌ای با $5x$ دارد؟

– جمله دوم سمت راست برابری؛ یعنی $20x$ ، چه رابطه‌ای با $5x$ و 2 دارد؟

– جمله سوم سمت راست برابری؛ یعنی 4 ، چه رابطه‌ای با 2 دارد؟

عبارت جبری $5x+2$ دو جمله‌ای و $(5x+2)^2$ را مربع دو جمله‌ای می‌نامیم. برای سرعت بخشیدن

به عملیات جبری می‌توان مربع دو جمله‌ای را به صورت زیر محاسبه کرد :

$$(5x + 2)^2 = (5x)^2 + \underbrace{2 \times 5x \times 2}_{\text{دو برابر حاصل ضرب دو جمله}} + 2^2$$

↙ ↘ ↙ ↘ ↙ ↘ ↙ ↘ ↙ ↘

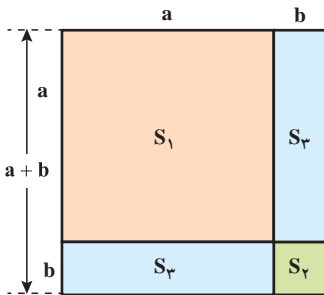
↙ ↘ ↙ ↘ ↙ ↘ ↙ ↘ ↙ ↘

↙ ↘ ↙ ↘ ↙ ↘ ↙ ↘ ↙ ↘

برای هر دو عدد مثبت a و b ، به کمک مساحت‌های مشخص شده در شکل زیر، درستی اتحاد

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

مقابل را نشان دهید.



$$\text{مساحت کل شکل} = (a+b)^2 = S_1 + 2S_3 + S_2$$

۴- مانند سؤال ۲ فعالیت، طرف دوم تساوی‌های زیر را بنویسید.

الف) $(5x-2)^2 = (5x-2)(5x-2) =$

ب) $(3-5x)^2 =$

ج) $(a-b)^2 =$

ارتباط بین جملات به دست آمده در طرف راست تساوی‌های بالا و جملات عبارت داده شده

در سمت چپ آنها را بیان کنید.

اتحاد مربع دو جمله‌ای :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم :

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

کار در کلاس

۱- حاصل عبارت‌های زیر را با توجه به اتحاد مربع دو جمله‌ای به دست آورید.

الف) $(2x+1)^2 =$

ب) $(4a+3b)^2 =$

ج) $(x^2 - \frac{1}{4})^2 =$

د) $(2xy - \frac{1}{4}x^3)^2 =$

هـ) $(\sqrt{2} + 3\sqrt{3})^2 =$

و) $(5 - 2\sqrt{2})^2 =$

۲- جاهای خالی را با توجه به نمونه پُر کنید.

$$(\dots + 3b^2)^2 = 4a^2 + \dots + 9b^4$$

مربع جمله دوم دو برابر مربع حاصل ضرب جمله اول
 مربع جمله دوم دو برابر مربع حاصل ضرب جمله اول
 مربع جمله دوم دو برابر مربع حاصل ضرب جمله اول
 مربع جمله دوم دو برابر مربع حاصل ضرب جمله اول

$$2a = \text{جمله اول} \Rightarrow (2a)^2 = 4a^2 = \text{مربع جمله اول}$$

$$12ab^2 = 2(2a)(3b^2) = \text{دو برابر حاصل ضرب جمله‌ها}$$

$$(2a+3b^2)^2 = 4a^2 + 12ab^2 + 9b^4$$

در نتیجه داریم :

الف) $(1+b)^2 = 1 + \dots + b^2$

ب) $(xy - \frac{1}{4})^2 = \dots - \dots + \frac{1}{4}$

ج) $(\dots - \dots)^2 = x^4 - \dots + \frac{1}{x^4} (x \neq 0)$ د) $(\dots - \dots)^2 = 36x^2 - 12xy + \dots$

فعالیت

در سال گذشته خاصیت بخشی عمل ضرب نسبت به عمل جمع را در چند جمله‌ای‌ها خوانده‌اید.

حاصل ضرب

$$a(b+c) = ab+ac$$

اکنون اگر این برابری را مانند زیر به صورت ضرب دو عبارت بنویسیم، دو جمله‌ای $ab+ac$ را به ضرب عبارت‌ها تجزیه کرده ایم:

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\text{تجزیه}} \\ ab+ac=a(b+c) \\ \uparrow \quad \uparrow \\ \text{(ب.م.م.) (بزرگ‌ترین مقسوم علیه عامل) مشترک} \end{array}$$

چند جمله‌ای‌های زیر را مانند نمونه تجزیه کنید:

الف) $8x^2 + 12x = 4x \cdot 2x + 4x \cdot 3$
 $= 4x(2x + 3)$ (ب.م.م.) = $4x$
 (با توجه به خاصیت پخش)

ب) $6a^4 - 18a^2 =$ ج) $7x^4 - 14x^2 + 21x^2 =$

د) $5x^2y - 10xy^2 + 15x^2y =$

کار در کلاس

اگر سه جمله‌ای $a^2 + 2ab + b^2$ را به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای به صورت $(a+b)^2$ بنویسیم، در واقع عبارت را به عامل‌های ضرب تجزیه کرده ایم؛ زیرا:

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\text{تجزیه}} \\ a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 = (a+b)(a+b) \end{array}$$

با توجه به نمونه زیر توضیح دهید که چگونه در سه جمله‌ای داده شده، جمله‌های اتحاد را تشخیص می‌دهید تا به کمک آن عبارت تجزیه شود.

الف) $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2 = (x+3)(x+3)$
 مربع کامل (x) مربع کامل (3) $2(x)(3)$ مربع کامل

ب) $x^2 - 4x + 4 = (\quad - \quad)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$

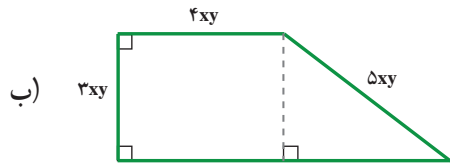
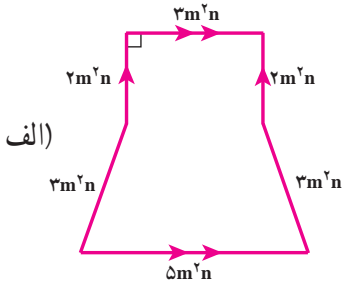
ج) $n^4 - 10n^2 + 25 = (\quad - \quad)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$

د) $18ax^2 + 24axy + 18ay^2 = 2a(4x^2 + 12xy + 9y^2) = 2a(\quad + \quad)^2 = \underline{\hspace{2cm}}$
 (ب.م.م.) = $2a$

۱- عبارت‌های جبری زیر را ساده کنید.

الف) $(-5m)^2(-2m)^3 - (\frac{1}{2}m)^2(-2m)^3$ ب) $7a^2 - 4b^2 + 5c^2 - (a^2 - 9b^2 - 11c^2)$
 ج) $(x^m - 1)(x^m - 1)$ د) $x - [(y-x) - (y-1)]$

۲- محیط و مساحت هر شکل را بیابید.



۳- طرف دیگر عبارت‌های زیر را با استفاده از اتحادها به دست آورید.

الف) $(5y - 3x)^2 =$ ب) $(-3a^2 - a)^2 =$
 ج) $(8x - \frac{1}{3})^2 =$ د) $(\frac{2}{7})^2 + 2(\frac{2}{7})(\frac{3}{3}) + (\frac{3}{3})^2 =$

۴- به کمک اتحاد مربع دو جمله‌ای، درستی تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$ ب) $a^2 + \frac{1}{a^2} = (a + \frac{1}{a})^2 - 2 \quad (a \neq 0)$

۵- عبارت‌های جبری زیر را تجزیه کنید.

الف) $2x^2 + 8x^2 + 8x$ ب) $3a^2b - 12ab^2 + a^2b^2$
 ج) $a(x+1) + b(x+1)^2$ د) $a^3 - 2a^2 + a$
 هـ) $x^2y^2 - 4xy + 4$ و) $25x^2 + 30x^2 + 9x^2$

۶- با تبدیل b به -b در اتحاد $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ، طرف دوم تساوی زیر را کامل کنید.

$$\underbrace{(a + (-b))^2}_{(a-b)^2} =$$

فعالیت

۱- حاصل عبارت زیر را با دو روش ارائه شده انجام دهید و آنها را کامل کنید.

$$\text{روش اول: } (a+b+c)^2 = (a+b+c)(a+b+c) =$$

$$\text{روش دوم: } ((a+b)+c)^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + \dots$$

به کمک نتیجه این فعالیت، حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

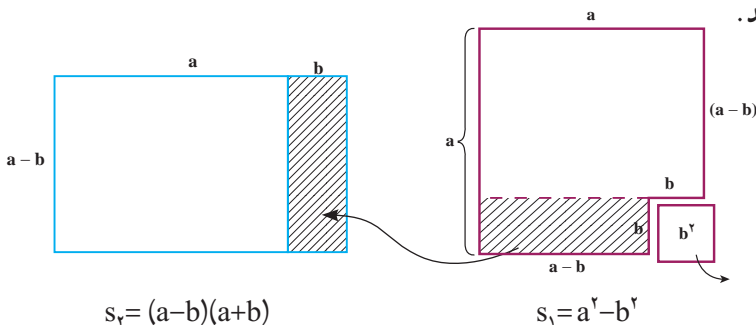
$$(a+b-c)^2 =$$

۲- با استفاده از ضرب عبارت‌های جبری، حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$(a+b)(a-b) =$$

اگر a و b مثبت و $b < a$ باشد، به کمک شکل‌های زیر درستی اتحاد $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ را

نتیجه بگیرید.



از آنجا که $s_1 = s_2$ ، بنابراین داریم:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

اتحاد مزدوج

این اتحاد را به صورت کلامی بیان کنید.

کاردر کلاس

۱- تساوی‌های زیر را با استفاده از اتحاد مناسب کامل کنید.

$$۱) (1+a)(1-a) = 1 - \dots$$

$$۳) (t + \dots)(t - \dots) = t^2 - 9$$

$$۲) (2a+5)(2a-5) = \dots - 25$$

$$۴) (a-b-c)^2 = a^2 + b^2 + \dots$$

۲- حاصل عبارت‌های زیر را مانند نمونه با استفاده از اتحاد مزدوج به دست آورید.

$$۱) (10-x)(x+10) = (10-x)(10+x) = 100 - x^2$$

$$۲) (-y-2z)(-2z+y) = (\quad - y)(-2z+y) = 4z^2 - \quad$$

$$۳) (-7y+t)(t+7y) =$$

$$۴) (-4y-2z)(2z-4y) =$$

$$۵) (x-2y+5)(x+2y-5) = [x-(2y-5)][x+(2y-5)] =$$

فعالیت

از اتحاد مزدوج در تجزیه عبارت‌های جبری نیز استفاده می‌شود.

$$A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$$

با توجه به این تساوی، جای خالی را پر کنید.

$$۱) x^2 - 9 = (x+3)(\quad - \quad)$$

$$۲) 4y^2 - \frac{1}{4}z^2 = (\quad + \quad)(\quad - \quad)$$

$$۳) (2x+1)^2 - y^2 = [(2x+1) - \quad][(\quad) + y]$$

$$۴) 1 - (3a+z)^2 = [1 - (\quad)][1 + (\quad)]$$

$$= (\quad)(1 + 3a + z)$$

$$۵) (2x+1)^2 - (3x+4)^2 = [(\quad) - (\quad)][(\quad) + (\quad)]$$

$$= (-x-3)(\quad + \quad)$$

$$۶) x^4 - y^4 = (x^2 + y^2)(\quad - \quad)$$

$$= (x^2 + y^2)(x+y)(\quad - \quad)$$

کار در کلاس

۱- محسن قصد دارد عبارت جبری زیر را تجزیه کند.

$$4x^2 - (7-3y)^2$$

محسن با توجه به شکل عبارت جبری به فکر استفاده از اتحاد مزدوج می‌افتد و این عبارت را

به کمک این اتحاد به صورت زیر تجزیه می‌کند.

$$(2x-7+3y)(2x+7-3y)$$

به نظر شما، محسن در استفاده از اتحاد مزدوج، A و B را چگونه انتخاب کرده است؟
 ۲- استفاده از اتحادها، می تواند بعضی از محاسبات به ظاهر مشکل را ساده کند. به کمک اتحادها، تساوی های زیر را کامل کنید.

$$98 \times 102 = (100 - 2) \times (100 + 2) = \text{————} =$$

$$497 \times 503 = \text{————} \times \text{————} =$$

$$(1001)^2 = (1000 + 1)^2 = \text{————}$$

فعالیت

۱- به تساوی های زیر دقت کنید. توضیح دهید عبارت سمت راست چگونه به دست آمده است؟
 بین جواب و عبارت سمت چپ چه ارتباطی وجود دارد؟

$$\text{الف) } (x+2)(x+5) = x^2 + 5x + 2x + 10 = x^2 + 7x + 10$$

$\begin{matrix} \leftarrow & & \rightarrow \\ 2+5 & & 2 \times 5 \end{matrix}$

$$\text{ب) } (x+9)(x-4) = x^2 + 9x - 4x - 36 = x^2 + 5x - 36$$

با توجه به عبارات بالا تساوی زیر را کامل کنید.

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (\quad)x + \text{————}$$

اتحاد به دست آمده را اتحاد جمله مشترک می نامند.

۲- با توجه به فعالیت ۱ اگر طرف راست عبارت بالا را داشته باشیم و بخواهیم آن را به حاصل ضرب دو عبارت تجزیه کنیم، اعداد a و b را چگونه تشخیص دهیم؟

$$x^2 + (a+b)x + ab = (x + \quad)(x + \quad)$$

$$\text{الف) } x^2 + 7x + 10 = (x + \quad)(\quad + \quad)$$

$$\text{ب) } x^2 + 7x + 12 = (x + \quad)(\quad + \quad)$$

$$\text{ج) } y^2 + y - 6 = (\quad + \quad)(\quad - \quad)$$

$$\text{د) } y^2 - y - 6 = (\quad + \quad)(\quad - \quad)$$

$$\text{ه) } y^2 + 5y + 6 = (\quad + \quad)(\quad + \quad)$$

۳- تجزیه عبارت $x^2 - 24 \cdot x + 101$ را چهار نفر از دانش آموزان به کمک اتحاد جمله مشترک به چهار صورت زیر انجام داده اند. کدام یک درست و کدام یک نادرست است؛ چرا؟

- جواب نفر سوم: $(x-2)(x+12)$
 جواب نفر اول: $(x+6)(x-4)$
 جواب نفر چهارم: $(x-12)(x+2)$
 جواب نفر دوم: $(x+6)(x+4)$

تمرین

۱- حاصل عبارت های زیر را با استفاده از اتحادها به دست آورید.

- الف) $(\frac{1}{4} - x)(\frac{1}{4} + x)$ د) $(3x+y-z)(3x+y+z)$
 ب) $(5x+4)(5x+3)$ ه) $(x-1)(x+1)(x^2+1)$
 ج) $(z - \sqrt{3})(z + \sqrt{3})$ و) $(x-2)(x+2)(x^2+3)$

۲- در قسمت های نقطه چین، با استفاده از اتحادها، عبارت های مناسب بگذارید.

- الف) $(xy-z)(xy+z) = \dots - z^2$ ج) $(x+a)(x-b) = x^2 + \dots - \dots$
 ب) $(\dots + \sqrt{5})(\dots - \sqrt{5}) = \frac{1}{4}y^2 - \dots$ د) $(x^2 + \dots)(x^2 - 5) = x^4 + 2x^2 - \dots$

۳- عبارات زیر را به کمک اتحادها، تجزیه کنید.

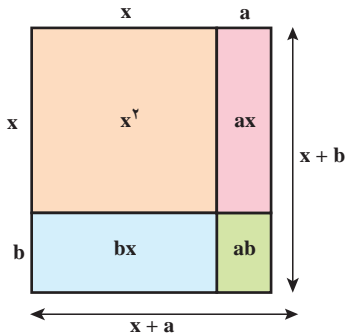
- الف) $a^2 - 8a + 15$ و) $x^2 - 13x + 36$
 ب) $x^2 + x + \frac{1}{4}$ ز) $x^2 - 12x + 36$
 ج) $x^2 + 10x + 24$ ح) $(x+y)^2 - 9$
 د) $x^2 - 2x - 8$ ط) $bx^2 - 5bx - 50b$
 ه) $4ax^2 - a$ ی) $x^4 - 5x^2 + 4$

۴- در اتحاد جمله مشترک اگر $a=b$ باشد، چه اتحادی به دست می آید؟ اگر a و b قرینه باشند،

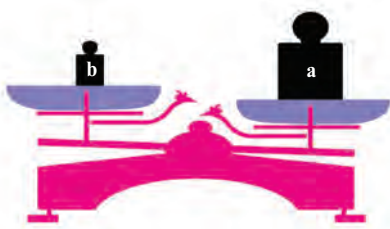
کدام اتحاد به دست می آید؟

۵- به کمک مساحت ها در شکل روبه رو، اتحاد

جمله مشترک را به دست آورید.



فعالیت



روی کفه‌های ترازو دو وزنه a و b کیلوگرمی قرار دارد. با توجه به شکل، وزنه a از وزنه b سنگین‌تر است. — با توجه به وضعیت ترازو، هر یک از نمادهای \neq ، $>$ ، $<$ را در جاهای خالی فقط یک بار استفاده و وزنه‌های a و b را با هم مقایسه کنید.

$$a \square b, a \square b, b \square a$$



در شکل بالا اگر وزنه‌ای p کیلوگرمی باشد، به طوری که $a=b+p$ ، در این صورت برای اینکه کفه‌های ترازو مقابل هم بایستند، باید وزنه p کیلوگرمی را روی کدام کفه قرار داد؟

هرگاه a و b دو عدد حقیقی باشد؛ به طوری که $a > b$ ، در این صورت عدد حقیقی مثبتی مانند p هست؛ به طوری که $a = b + p$.

با توجه به برابری‌های زیر مانند نمونه، یک نابرابری برای هر کدام بنویسید.

الف) $x = y + 4 \Rightarrow x > y$

ج) $a - 2 = b + 3$

ب) $m + 1 = n + 3$

د) $2m = 3n \quad (m, n > 0)$

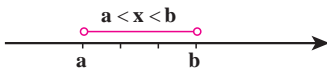
هرگاه a و b دو عدد حقیقی باشند، فقط یکی از حالت‌های « a بزرگ‌تر از b » یا « a کوچک‌تر از b » یا « a برابر با b » را خواهیم داشت.

چنانچه عدد حقیقی a منفی نباشد در این صورت $a > 0$ یا $a = 0$ است. در این حالت می‌نویسیم $a \geq 0$ و می‌خوانیم a بزرگ‌تر یا برابر با 0 است؛ مانند $2 \geq 0$ یا $0 \geq 0$.

چنانچه a و b دو عدد حقیقی باشند، به طوری که a از b کمتر نباشد، در این صورت $a > b$ یا $a = b$ است. در این حالت می‌نویسیم $a \geq b$.

برای سه عدد حقیقی a و b و x به طوری که عدد دلخواه

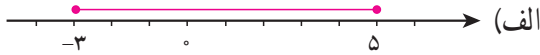
x بین اعداد a و b باشد ($a < b$)، می‌نویسیم: $a < x < b$.



مانند: $1 < 2 < 5$



۱- مناظر با هر یک از ناحیه‌های مشخص شده روی محور، یک نابرابری بنویسید.



۲- درستی یا نادرستی هر یک از عبارات‌های زیر را بررسی کنید.

(الف) اگر $a+b > 0$ آنگاه، a و b هر دو مثبت اند.

(ب) اگر $ab > 0$ آنگاه، a و b هم علامت هستند.

(ج) اگر $\frac{ab}{c} < 0$ آنگاه، a و b و c منفی هستند.

(د) اگر $a^2b < 0$ آنگاه، b منفی است.

۳- عبارات‌های کلامی را به صورت جبری بنویسید.

• ۳ برابر عددی منهای یک از ۷ بزرگ تر است.

• قرینه دو برابر عددی به علاوه ۳ از ۸ کوچک تر است.

فعالیت

۱- به دو طرف نابرابری‌های زیر، عددهایی را مانند نمونه اضافه کنید. آیا نابرابری باز هم برقرار است؟

$$-3 < 1 \xrightarrow{+3} -3 + 3 < 1 + 3 \rightarrow 0 < 4$$

$$-3 < 1 \xrightarrow{-7}$$

$$-3 < -2 \xrightarrow{-10}$$

خاصیت ۱: اگر دو طرف یک نابرابری را با عددی مانند c جمع کنیم، نابرابری

همچنان برقرار است؛ یعنی اگر $a > b$ آنگاه $a + c > b + c$.

۲- دو طرف نابرابری زیر را در عددهای مختلف ضرب کنید؛ آیا نابرابری‌ها تغییر می‌کنند؟

$$-7 > -9 \xrightarrow{\times 3} -21 > -27$$

$$-7 > -9 \xrightarrow{\times (-3)} 21 < 27$$

$$-7 > -9 \xrightarrow{\times^{\circ}}$$

$$-7 > -9 \xrightarrow{\times(-1)}$$

خاصیت ۲: اگر دو طرف یک نابرابری را در عدد مثبتی مانند c ضرب کنیم، نابرابری همچنان برقرار خواهد بود؛ یعنی اگر $a > b$ و $c > 0$ آنگاه $ac > bc$.

خاصیت ۳: اگر دو طرف نابرابری $a > b$ را در عدد منفی c ($c < 0$) ضرب کنیم، در این صورت داریم: $ac < bc$.

۳- نابرابری $2x+1 > 7$ را در نظر بگیرید؛ این نابرابری شامل متغیر x است و درجه نسبت به x با ۱ برابر است؛ در این صورت به این نابرابری، **نامعادله یک مجهولی درجه اول** می‌گوییم. در جدول زیر مقادیر داده شده را به جای x قرار دهید؛ آیا در هر حالت نابرابری برقرار است؟

نامعادله	$x=-1$	$x=2$	$x=3$	$x=4$	$x=7$
$2x+1 > 7$	$2(-1)+1 > 7$ \downarrow $-1 > 7$ نادرست				

مجموعه مقادیری که به ازای آنها، نامعادله به نابرابری درست تبدیل شود، **مجموعه جواب نامعادله** است. با توجه به جدول بالا، ۴ و ۷ در مجموعه جواب این نامعادله است. اکنون با توجه به خاصیت‌های نابرابری‌ها و پاسخ به سؤالات زیر، این نامعادله را حل کنید.

– دو طرف نامعادله را با ۱- جمع کنید.

– دو طرف نامعادله حاصل را در $\frac{1}{2}$ ضرب کنید یا دو طرف نامعادله را بر ۲ تقسیم کنید.

– با توجه به نابرابری $x > 3$ ، در می‌یابیم که مجموعه همه عددهای بزرگ‌تر از ۳، مجموعه جواب این نامعادله است. چنانچه مجموعه جواب نامعادله را با D نمایش دهیم، خواهیم داشت: $D = \{x \in \mathbb{R} | x > 3\}$. می‌توان مجموعه جواب این نامعادله را روی محور عددهای حقیقی به صورت زیر نمایش داد.



$$2x + 1 > 7 \xrightarrow{+(-1)} \quad \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} \quad \text{_____}$$

مجموعه جواب نامعادله‌های زیر را مانند نمونه به دست آورید.

الف) $2x + 7 \geq 15$

ب)
$$\frac{x}{3} - \frac{1}{2} < \frac{x-1}{6} \xrightarrow{\times 6} 6 \times \frac{x}{3} - 6 \times \frac{1}{2} < 6 \times \frac{x-1}{6}$$

$$\rightarrow 2x - 3 < x - 1 \xrightarrow{+(-x)} 2x - 3 + (-x) < x - 1 + (-x)$$

$$\rightarrow x - 3 < -1 \xrightarrow{+3} x < 2 \quad D = \{x \in \mathbb{R} | x < 2\}$$

ج) $3(x-1) \geq 2x+1$ د) $\frac{2}{3}(x+7) - \frac{x}{4} \leq \frac{1}{2}(3-x) + \frac{x}{6}$

تمرین

۱- در جاهای خالی نمادهای $<$ یا $>$ را جایگزین کنید.

الف) $a = b = 1$ است. در این صورت $a \square b$. (ج) اگر $2(p-1) = 2q-3$ ، در این صورت $p \square q$.

ب) اگر $u-v = -2$ ، در این صورت $u \square v$. (د) اگر $\frac{a-b}{4} = -3$ ، در این صورت $a \square b$.

۲- علامت عددهای حقیقی a, b, c را طوری تعیین کنید که نابرابری‌های زیر برقرار باشد:

الف) $\frac{ac}{b^2} < 0$ ب) $\frac{a}{bc} > 0$ ج) $ab > 0$ د) $\frac{a^2}{bc} > 0$

۳- مجموعه جواب نامعادله‌های زیر را به دست آورید.

الف) $2(x-3) + 5 < 5-x$ ج) $\frac{y-3}{4} - 1 > \frac{y}{2}$

ب) $3-2x \geq 5(3-2x)$ د) $-2 - \frac{q}{4} \leq \frac{1+q}{3}$

۴- اگر $a^2 > b^2$ آیا همواره می‌توان نتیجه گرفت، $a > b$ ؟

۵- اگر $a, b > 0$ و $a^2 > b^2$ ، نشان دهید $a > b$ (از اتحاد مزدوج کمک بگیرید).

۶- عبارتهای کلامی زیر را به زبان ریاضی بنویسید.

الف) اگر پول علی را سه برابر کنیم، حداقل 300 تومان از دو برابر پولش بیشتر می‌شود.

ب) مجموع نصف عدد a و چهار برابر عدد b ، حداکثر 6 واحد است.

۷- دو نفر با وزن های ۸۵ و ۶۵ کیلوگرم به جنگلی رفتند. آنها در این جنگل به منابع غذایی دسترسی ندارند. برای همین همراه خود مواد غذایی ای برده اند که ۴۵۰۰ کیلوکالری انرژی دارد. اگر فرض کنیم هر انسان روزانه حداقل به اندازه سه برابر وزن خود انرژی نیاز دارد، آنها حداکثر چند روز می توانند با مواد غذایی خود در جنگل دوام بیاورند؟

خوارزمی

خوارزمی، ابو عبدالله، محمد بن موسی، متولد خوارزم بوده و حدود سال ۲۳۲ هـ ق فوت کرده است. این ریاضی دان، منجم، جغرافی دان و مورخ ایرانی یکی از بزرگ ترین دانشمندان مسلمان و بزرگ ترین عالم زمان خود بود. کتاب جبر و مقابله خوارزمی از آغاز تألیف، یعنی اوایل قرن سوم هجری برابر با قرن نهم میلادی و تا قرن شانزدهم میلادی، نزد ریاضی دانان به عنوان سند و حجت شناخته می شده است. در زیر بخشی از مقدمه کتاب جبر و مقابله و ترجمه آن آمده است.



به نام خداوند بخشنده مهربان

خدای راسپاس بر نعمت هایش، بدان گونه که شایسته اوست؛ سپاسی آن چنان، که اگر بر آیینی که بر بندگان ستایشگر او فرض شده انجام شود «شکر» نامیده می شود، و باعث افزونی نعمت می گردد، و ما را از دگرگونی های روزگار در امان می دارد تا به خداوندی اش گردن نهیم، و خویشتن را در پیشگاه عزتش ناچیز شمیریم، و در برابر کبریا و عظمتش فروتن شویم. خدایی که محمد (ص) را در روزگاری به پیامبری فرستاد که پیوند مردم با پیامبران گسسته شده، و حق ناشناخته مانده، و راه رستگاری ناپیدا گشته بود؛ پیامبری که با آمدنش کوردلان بینا شدند و گمراهان از هلاکت رهایی یافتند؛ به وجودش هر اندکی فزونی گرفت و هر پراکندگی به پیوستگی و یگانگی انجامید.