



## درس اول: توان صحیح

در سال‌های گذشته با توان‌های طبیعی یک عدد آشنا شده‌اید؛ به طور مثال می‌دانید:

$$2^3=8 \quad \text{و} \quad (-5)^2=25 \quad \text{و} \quad \left(\frac{3}{4}\right)^4=\frac{81}{256} \quad \text{و} \quad \left(\frac{-1}{2}\right)^5=\frac{-1}{32}$$

همچنین می‌دانید که اگر  $a$  عددی غیرصفر باشد،  $a^0=1$ .

آیا توان منفی یک عدد (ناصفر) هم معنی دارد؟ مثلاً حاصل  $2^{-3}$  چیست؟ به کمک فعالیت زیر

پاسخ این سؤال را می‌توان پیدا کرد:

### فعالیت

جدول زیر را در نظر بگیرید و به سؤالات پاسخ دهید:

۱۶	۸	۴	۲	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}=\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{8}=\frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{16}=\frac{1}{2^4}$	$\frac{1}{32}=\frac{1}{2^5}$
$2^4$	$2^3$	$2^2$	$2^1$	$2^0$	$2^{\circ}$	$2^{\circ}$	$2^{\circ}$	$2^{\circ}$	$2^{\circ}$

الف) عددهای سطر اول جدول با هم چه ارتباطی دارند؟

ب) هر یک از عددهای سطر دوم چه رابطه‌ای با عدد بالای آن دارد؟

ج) توان‌های عددهای سطر دوم تا  $2^0$  با یکدیگر چه رابطه‌ای دارد؟

د) این الگو را ادامه دهید و در جاهای خالی عددهای مناسب بنویسید.

ه) به کمک جدول، تساوی‌های زیر را کامل کنید:

$$2^{-3} =$$

$$2^{-4} =$$

$$2^{-5} =$$

به طور کلی اگر  $a$  یک عدد غیرصفر باشد و  $n$  یک عدد طبیعی باشد، آن‌گاه:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad a \neq 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

مثال:

الف)  $7^{-2} = \frac{1}{7^2} = \frac{1}{49}$

ج)  $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^4} = \frac{1}{\frac{16}{81}} = \frac{81}{16}$

ب)  $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{25}} = 25$

د)  $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{8}$

۱- با توجه به مثال‌های حل شده‌ی زیر، پاسخ موارد بعدی را به صورت یک عدد توان‌دار با توان

طبیعی بنویسید :

الف)  $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} = \left(\frac{1}{5}\right)^2$       ب)  $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$

ج)  $(-6)^{-3} = \frac{1}{\quad} = \quad = \quad$       د)  $\left(-\frac{2}{7}\right)^{-4} = \quad = \quad = \quad$

به طور کلی اگر  $n$  یک عدد طبیعی و  $a \neq 0$  آن‌گاه:  $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$

۲- عبارتهای برابر را مانند نمونه به هم وصل کنید:  $(x \neq 0, y \neq 0)$

$2^{-2}$	$x^{-1}$	$(xy)^{-1}$	$(-2)^2$	$\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$	$\left(\frac{x}{y}\right)^{-1}$	$xy^{-1}$	$\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$
$\frac{1}{x}$	$5^3$	$\frac{1}{4}$	$\frac{y}{x}$	$\frac{1}{xy}$	$\frac{x}{y}$	$\frac{5}{2}$	$4$

←————→

۳- حاصل هر عبارت را به ساده‌ترین صورت بنویسید:

الف)  $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-4} =$

و)  $1^{-2} =$

ب)  $2^{-1} + 3^{-1} + 4^{-1} =$

ز)  $\frac{(-3)^0}{3} =$

ج)  $-(-5)^2 =$

ح)  $-\frac{1}{2^{-2}} =$

د)  $-(-5)^{-2} =$

ط)  $\left(\frac{2}{5}\right)^{-2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 =$

ه)  $-5^{-2} =$

ی)  $2^0 - 2^{-1} =$

اگر  $m$  و  $n$  دو عدد طبیعی باشند، و  $a$  یک عدد دلخواه باشد، داریم:  $a^m \times a^n = a^{m+n}$   
 آیا این رابطه برای توان‌های منفی هم درست است؟ برای توان‌های صحیح چه رابطه‌ای داریم؟  
 با فعالیت بعدی می‌توان رابطه را برای عددهای صحیح هم حدس زد.

## فعالیت

به حاصل ضرب‌های زیر توجه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$3^{-4} \times 3^6 = \frac{1}{3^4} \times 3^6 = \frac{3^6}{3^4} = 3^{6-4} = 3^2$$

$$2^{-5} \times 2^{-2} = \frac{1}{2^5} \times \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2^{5+2}} = \frac{1}{2^7} = 2^{-7}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{-5} = (-2)^3 \times (-2)^5 = (-2)^8 = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-8}$$

حاصل ضرب مقابل را نیز به همین روش به دست آورید:

$$5^3 \times 5^{-7} = \dots\dots\dots$$

در حالت کلی اگر  $m$  و  $n$  دو عدد صحیح باشند و  $a$  یک عدد دلخواه (غیرصفر)،  
 رابطه زیر برقرار است:

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

مثال:

$$2^3 \times 2^{-5} \times 2^{-4} = 2^{3-5-4} = 2^{-6}$$

$$(2x^{-1}) \times (3x^4) \times (4x^3) = 24x^{-1+4+3} = 24x^6 \quad (x \neq 0)$$

## کار در کلاس

حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به صورت یک عبارت توان‌دار بنویسید: ( $b, x, y \neq 0$ )

$$5^{-7} \times 5^{10} =$$

$$(-4)^{-9} \times (-4)^{-1} =$$

$$\left(\frac{-3}{8}\right)^4 \times \left(\frac{-3}{8}\right)^{-9} =$$

$$(\sqrt{2})^4 \times (\sqrt{2})^{-2} =$$

$$b^{-2} \times b^{-3} =$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{-7} \times \left(\frac{x}{y}\right)^{11} =$$

اگر  $a$  و  $b$  دو عدد مخالف صفر و  $m$  و  $n$  دو عدد صحیح باشند، روابط زیر برقرار است:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^m \div a^n = a^{m-n} ; \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m} ; \quad \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m ;$$

$$(a^m)^n = a^{mn} ; (ab)^m = a^m \cdot b^m ; \quad a^0 = 1$$

## کار در کلاس

حاصل عبارتهای زیر را به صورت توان دار بنویسید.

الف)  $\frac{7^3}{5^5} =$

ب)  $2^{-2} \times 5^{-2} =$

ج)  $\left(\frac{-2}{3}\right)^{-3} \times 12^{-3} =$

د)  $\left[\left(\frac{-2}{5}\right)^{-2}\right]^{-1} =$

ه)  $\frac{2^8 \times 5^{10}}{2^4 \times 5^6} = \frac{2^8}{2^4} \times \frac{5^{10}}{5^6} =$

و)  $\frac{x^5 \cdot y^2 \cdot z}{x^{-2} \cdot y^7 \cdot z^3} = x^{5-(-2)} \cdot y^{2-7} \cdot z^{1-3} =$   $x, y, z \neq 0$

## تمرین

۱- برای هر عبارت دو پاسخ داده شده است. پاسخ درست را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف)  $3^{-2} \begin{cases} \frac{1}{9} \\ -6 \end{cases}$

ب)  $3^{-1} \begin{cases} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{cases}$

ج)  $3^{-1} \times 4^{-1} \begin{cases} 12^{-1} \\ 7^{-1} \end{cases}$

د)  $3^{-1} + 4^{-1} \begin{cases} \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \\ 7^{-1} \end{cases}$

ه)  $5^{-2} \begin{cases} -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{25} \end{cases}$

و)  $(-2)^2 \begin{cases} 3^{-2} \\ -8 \end{cases}$

۲- جرم یک اتم هیدروژن حدود  $10^{-24}$  گرم است. جرم یک وزنه  $100$  کیلوگرمی چند برابر جرم یک اتم هیدروژن است؟

۳- عددهای  $16^2$  و  $8^4$  و  $2^{11}$  را با یکدیگر مقایسه کنید.

۴- در جاهای خالی علامت  $>$ ،  $<$  یا  $=$  قرار دهید:

الف)  $3^{-1} \bigcirc 3^{-2}$

ب)  $2^0 \bigcirc 2^{-5}$  ج)  $(0/5)^{-2} \bigcirc (0/6)^{-2}$

د)  $5^{-1} \bigcirc 5^0$

ه)  $\left(\frac{-8}{15}\right)^0 \bigcirc 1$  و)  $-5^{-2} \bigcirc (-5)^{-2}$

۵- در هر یک از تساوی‌های زیر  $x$  چه عددی است؟

الف)  $5^x \times 5^{-2} = 5^4$

ب)  $5^x \div 5^{-2} = 5^4$

۶- کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟

الف)  $a^4 \times a^5 = a^{20}$

ه)  $(-3)^0 + (3^{-1})^{-1} = 4$

ب)  $a^4 \times a^5 = a^9$

و)  $3^{-1} \times 4^{-1} = 12^{-2}$

ج)  $(a^m)^n = (a^n)^m \quad a > 0$

ز)  $6^{-2} = -\frac{2}{6}$

د)  $3^{-2} = -9$

ح)  $3^{-1} < 3^{-1}$

۷- حاصل هر عبارت را به دست آورید.

الف)  $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \times 27^{-3}$

ب)  $(0/2)^{-4} \times 25^{-2}$

ج)  $\left(\frac{15}{14}\right)^{-4} \times \left(\frac{45}{28}\right)^4$

د)  $(-5^{-2})^{-1}$

۸- عددهای داده شده را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$2^{-2}$  و  $1^{-9}$  و  $(-1)^{21}$  و  $(-7)^2$  و  $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}$  و  $2^3$  و  $5^{-2}$  و  $2^{-3}$

۹- عبارت نادرست را مشخص کنید.

$(0/987)^0 < 1^0$      $(1/2)^7 < (1/0.2)^7$      $\left(\frac{5}{4}\right)^2 < (0/7)^2$      $\left(\frac{3}{4}\right)^2 > (0/75)^2$

۱۰- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف)  $\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{8}{3}\right)^{-3}}{-2^5 \times 2^{-8}}$

ب)  $\left[-\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right]^{-1}$

فعالیت

۱- در جدول زیر تعدادی عدد داده شده و حاصل ضرب آنها در توان‌های  $10^0$  یا حاصل تقسیم آنها بر توان‌های  $10^0$  خواسته شده است. جاهای خالی را پر کنید و توضیح دهید که هنگام ضرب یا تقسیم، مکان ممیز چگونه تغییر می‌کند؟

عدد	تقسیم بر $10^0$	ضرب در $10^0$	تقسیم بر $10^0$	ضرب در $10^0$	تقسیم بر $10^0$	ضرب در $10^4$	تقسیم بر $10^4$	ضرب در $10^5$	تقسیم بر $10^5$
۱۵									
$0.02$									
$9/3$									

۲- سرعت نور  $300,000,000$  متر بر ثانیه است. فاصله‌ای که نور در  $100$  ساعت می‌پیماید، چند متر است؟ راه حل این مسئله در ادامه داده شده است. توضیح دهید که پاسخ چگونه به دست آمده است.

$$\text{فاصله‌ای که نور در } 100 \text{ ساعت می‌پیماید} = 300000000 \times 360000 = 109800000000 \text{ ساعت}$$

$$\text{ثانیه } 360000 = 100 \text{ ساعت}$$

واضح است که ضرب دو عدد بالا به این صورت دشوار است. در محاسبات ریاضی ابتدا هر کدام از این عددها را به صورت یک عدد اعشاری مثبت با یک رقم صحیح در توانی از عدد  $10^0$  نمایش می‌دهند که آن را «نماد علمی» آن عدد می‌گویند؛ بنابراین:

$$300000000 = 3 \times 10^8$$

$$360000 = 3/6 \times 10^5$$

$$\Rightarrow 3 \times 10^8 \times 3/6 \times 10^5 = 10/8 \times 10^{13} = 1/0.8 \times 10^{14}$$

دقت کنید که حاصل ضرب نیز با نماد علمی نمایش داده شده است. این گونه نمایش به جز سادگی در نوشتن، محاسبات را آسان تر می‌کند و در ضمن نوعی نظم و هماهنگی در نمایش عددهای بزرگ (یا کوچک) به شمار می‌آید.

مثال:

$$124000 = 1/24 \times 10^5$$

$$1700000000 = 1/7 \times 10^9$$

$$1393 = 1/393 \times 10^2$$

$$9204000 = 9/204 \times 10^6$$

$$125/39 = 1/2539 \times 10^2$$

قطر متوسط یک یاخته (سلول) گویچه<sup>۱</sup> (گلبول) قرمز  $7 \times 10^{-7}$  میلی متر است. همانند عددهای بزرگ، عددهای کوچک مانند  $7 \times 10^{-7}$  را هم می توان به صورت نماد علمی نمایش داد؛ یعنی:

$$7 \times 10^{-7} = 7 \times 10^{-6}$$

ضخامت یک برگه کاغذ حدود  $16 \times 10^{-6}$  سانتی متر است که با نماد علمی، آن را به صورت  $1/6 \times 10^{-3}$  نمایش می دهیم.

به طور کلی نماد علمی هر عدد اعشاری مثبت به صورت  $a \times 10^n$  است که در آن  $1 \leq a < 10$  و  $n$  عددی صحیح است.

$$1275000 = 1/275 \times 10^{-5}$$

$$123 = 1/23 \times 10^2$$

مثال:

$$13700 = 1/37 \times 10^{-2}$$

$$290000 = 2/9 \times 10^4$$

## کار در کلاس

۱- هر یک از عددهای داده شده را با نماد علمی نمایش دهید:

$$245000 =$$

$$150000000 =$$

$$0/005 =$$

$$0/000061 =$$

$$1404 =$$

$$0/1275 =$$

۲- نمایش اعشاری عددهای زیر را بنویسید:

$$5/2 \times 10^{-3} =$$

$$7/304 \times 10^{-5} =$$

$$2/28 \times 10^8 =$$

$$9/4612 \times 10^9 =$$

$$6/02 \times 10^{-2} =$$

$$1/1 \times 10^4 =$$



۱- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید :

$$\text{الف) } \frac{3^{-5} \times 10^{-5} \times 25}{4^{-5} \times 15^{-5}}$$

$$\text{ب) } \frac{8^{-1} \times 4^2}{2^{-4} \times \frac{1}{8}}$$

۲- کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟

$$1/0.2 \times 10^{-5} = 0.00000102$$

$$5/9 \times 10^{-1} = 0.59$$

$$4/3 \times 10^2 = 4300$$

$$7/0.04 \times 10^{-2} = 0.7004$$

$$6/18 \times 10^7 = 61800000$$

$$8/2570 \times 10^4 = 82570$$

۳- شعاع خورشید تقریباً  $695000$  کیلومتر است؛ این عدد را با نماد علمی نمایش دهید.

۴- اندازه یک باکتری  $0.0000005$  متر است؛ این عدد را با نماد علمی نمایش دهید.

۵- قطر خورشید حدود  $1/4 \times 10^9$  متر و قطر زمین حدود  $1/3 \times 10^7$  متر است. قطر خورشید

تقریباً چند برابر قطر زمین است؟

۶- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید و به صورت نماد علمی نمایش دهید :

$$2 \times 10^{-7} \times 4 \times 10^9$$

$$\frac{12/5 \times 10^{-4}}{25 \times 10^{-19}}$$

۷- فاصله مریخ از زمین  $9/17 \times 10^7$  کیلومتر و فاصله کیوان از زمین  $6/287 \times 10^8$  کیلومتر

است. با مقایسه این دو عدد مشخص کنید کدام سیاره به زمین نزدیک تر است؟

۸- در جاهای خالی حداقل ۳ عدد صحیح مختلف قرار دهید تا نامساوی درست باشد.

$$2/7 \times 10^0 > 0.2 \quad 0.3 > 0.03 \times 10^0$$

۹- عددهای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید :

$$1/5 \times 10^{-2}, 1/2 \times 10^6, 5/35 \times 10^{-3}, 3/7 \times 10^{-2}$$

## فعالیت

۱- حاصل هر یک از عبارتهای زیر را مانند نمونه‌ها به دست آورید :

$$\begin{aligned} (-3)^2 = 9 & \quad (\sqrt{5})^2 = 5 & \quad \left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2 = & \quad \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \\ (-\sqrt{5})^2 = & \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2 = & \quad 4^2 = & \quad (-4)^2 = \end{aligned}$$

مربع (توان دوم) عددهای ۳ و -۳ برابر ۹ است. اعداد ۳ و -۳ را ریشه‌های دوم عدد ۹ می‌نامند. همان گونه که در سال‌های گذشته دیده‌اید، ریشه‌های دوم ۹ را با  $\sqrt{9}$  و  $-\sqrt{9}$  نمایش می‌دهند و داریم:

$$\sqrt{9} = 3 \quad \text{و} \quad -\sqrt{9} = -3$$

۲- جاهای خالی را در جدول زیر کامل کنید :

عدد	۳	-۳			$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\sqrt{5}$	$-\sqrt{5}$				
مربع عدد (توان دوم)	۹		۱۶						$\frac{1}{49}$		۶	

ریشه‌های دوم عدد  $\frac{4}{9}$ ، اعداد  $\frac{2}{3}$  و  $-\frac{2}{3}$  هستند. ریشه‌های دوم ۷، عددهای  $\sqrt{7}$  و  $-\sqrt{7}$  هستند. ریشه دوم صفر، همان صفر است و داریم  $\sqrt{0} = 0$ .

به طور کلی اگر  $b$  یک عدد حقیقی مثبت باشد،  $\sqrt{b}$  و  $-\sqrt{b}$  را ریشه‌های دوم  $b$  می‌نامند. همان طور که می‌دانید، عددهای منفی ریشه دوم ندارند.

۳- جاهای خالی را در جدول زیر کامل کنید.

عدد	۲	-۲	۳	-۳		$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{2}$	۵	$-\frac{2}{3}$	۰
مکعب عدد (توان سوم)	۸	-۸			۶۴					

مکعب (توان سوم) عدد ۲ برابر ۸ است؛ یعنی  $2^3=8$ . ریشه سوم عدد ۸ عددی است که وقتی به توان ۳ برسد، برابر ۸ می‌شود؛ پس، ریشه سوم عدد ۸ برابر ۲ است و می‌نویسیم  $\sqrt[3]{8}=2$ . همچنین چون  $(-2)^3=-8$  ریشه سوم عدد -۸ برابر -۲ است و می‌نویسیم  $\sqrt[3]{-8}=-2$ ؛ به عبارت دیگر با اینکه عددهای منفی ریشه دوم ندارند، ولی ریشه سوم دارند. به کمک جدول قبل دیده می‌شود که ریشه سوم عدد ۶۴ برابر ..... و ریشه سوم عدد  $-\frac{8}{27}$  عدد ..... است.

۴- طرف دوم تساوی‌های زیر را بنویسید:

$$(\sqrt[3]{8})^3 = \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = \sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{-27} =$$

به طور کلی اگر  $b$  یک عدد حقیقی باشد، ریشه سوم آن را با  $\sqrt[3]{b}$  نمایش می‌دهیم.  
هر عدد فقط یک ریشه سوم دارد.

## کار در کلاس

۱- حاصل هر عبارت را به دست آورید:

$$\sqrt{81} = \sqrt{4^2} = \sqrt{(-4)^2} = \sqrt{-1} =$$

$$\sqrt{\frac{27}{125}} = \sqrt[3]{6^3} = \sqrt[3]{-\frac{8}{1000}} = \sqrt[3]{(-7)^3} =$$

۲- به کمک رابطه  $\sqrt{x^2} = |x|$ ، که در فصل ۲ آموخته‌اید، حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید:

$$\sqrt{(-6)^2} = \sqrt{8^2} = \sqrt{\left(-\frac{3}{5}\right)^2} =$$

$$\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = \sqrt{(2-9)^2} = \sqrt{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} =$$

۳- حاصل عبارت  $\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2}$  را در هر یک از حالت‌های زیر به دست آورید؛ یکی از حالت‌ها

حل شده است.

$$\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = \text{الف) } x \text{ و } y \text{ هر دو مثبت هستند } (x > 0, y > 0).$$

$$\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = |x| + |y| = x - y \quad \text{ب) } x \text{ مثبت و } y \text{ منفی است } (x > 0, y < 0).$$

$$\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = \quad \text{ج) } x \text{ منفی و } y \text{ مثبت است } (x < 0, y > 0).$$

$$\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = \quad \text{د) } x \text{ و } y \text{ هر دو منفی هستند } (x < 0, y < 0).$$

## ضرب و تقسیم رادیکال‌ها

در سال گذشته برای دو عدد مثبت  $a$  و  $b$  رابطه‌های زیر را آموختید:

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

به کمک فعالیت زیر می‌توان حدس زد که این روابط چگونه برای ریشه سوم برقرار است.

### فعالیت

با توجه به عددهای داده شده  $a$  و  $b$  جدول زیر را مانند نمونه کامل کنید. با مقایسه دو ستون آخر جدول چه حدسی می‌زنید؟

$a$	$\sqrt[3]{a}$	$b$	$\sqrt[3]{b}$	$ab$	$\sqrt[3]{ab}$	$\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b}$
۸	۲	۱۲۵	۵	۱۰۰۰	۱۰	$۲ \times ۵ = ۱۰$
۲۷		$\frac{1}{8}$				
-۸		۲۷				

به‌طور کلی برای هر دو عدد  $a$  و  $b$  داریم:  $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b}$ ، همچنین اگر

$b \neq 0$  داریم:

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$$

### کار در کلاس

۱- آیا تساوی زیر برقرار است؟ توضیح دهید.

$$\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{۲۷} = \sqrt[3]{8+۲۷}$$

می‌توانید از استدلال زیر برای بیان نادرست بودن این تساوی استفاده کنید.

«سمت چپ تساوی برابر ۵ است؛ در حالی که سمت راست آن کمتر از ۴ است.»

۲- در تساوی‌های زیر جاهای خالی را کامل کنید :

$$\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{\quad} =$$

$$3\sqrt[3]{-2} \times 5\sqrt[3]{4} = 15\sqrt[3]{-8} = \quad$$

$$\sqrt{128} = \sqrt{64} \times \sqrt{\quad} = 4\sqrt{2}$$

$$\sqrt[3]{20} = \sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{\quad}$$

$$\sqrt[3]{\frac{125}{64}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{64}} = \quad$$

$$\frac{\sqrt{-54}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{-54}{2}} = \sqrt[3]{-27} = \quad$$

### تمرین

۱- ریشه‌های دوم عددهای زیر را بیابید :

$$\frac{49}{16}, \frac{1}{81}, 15, 144, 12, 18$$

۲- ریشه سوم عددهای زیر را به دست آورید :

$$216, 7^3, -5, -\frac{1}{216}, 10$$

۳- کدام یک درست و کدام یک نادرست است؟

$\sqrt{(-1)^2} = -1$	$\sqrt[3]{(-1)^3} = -1$	$\sqrt{(-5)^2} =  -5  = 5$	$\sqrt[3]{(-5)^3} = -5$
$-\sqrt{\frac{49}{256}} = -\frac{7}{16}$	$\sqrt{1/44} = 1/2$	$(\sqrt{-1})^2 = 1$	$\sqrt[3]{-64} = -4$

۴- حاصل هر عبارت را به عدد مساوی آن در سطر دوم، وصل کنید :

$$\sqrt{125} \times \sqrt{36}$$

$$\sqrt{-1} \times \sqrt{81}$$

$$\sqrt[3]{\frac{81}{3}}$$

$$\sqrt{-25} \times \sqrt{5}$$

۳

۳۰

-۹

-۵

۵- حداقل سه عدد صحیح مختلف مثال بزنید که اگر به جای  $a$  قرار دهیم، نامساوی زیر درست

باشد :

$$\sqrt[3]{a} < \sqrt{4}$$

۶- رابطه  $\sqrt{(-x)^2} = x$  به چه شرطی درست است؟ مثال بزنید.

۷- اگر مساحت کل یک مکعب  $96a^2$  باشد، حجم آن را بر حسب  $a$  به دست آورید.

۸- اگر  $x > 0$  و  $y < 0$  باشد، حاصل  $\sqrt{x^2} - \sqrt{y^2}$  را ساده کنید و بدون قدرمطلق بنویسید.

۹- عبارت‌های زیر را مانند نمونه ساده کنید:  $\sqrt{9^0} = \sqrt{2 \times 3^2 \times 5} = \sqrt{3^2} \times \sqrt{1^0} = 3\sqrt{1^0}$

$$\sqrt{15^0}, \quad \sqrt{8^0}, \quad \sqrt{24}, \quad \sqrt[3]{125^2}$$

۱۰- آیا تساوی‌های زیر درست است؟

$$(\sqrt[3]{-2})^3 = -2$$

$$\sqrt[3]{-4} = -\sqrt[3]{4}$$

۱۱- حاصل را به دست آورید :

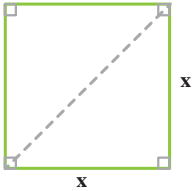
$$2\sqrt[3]{16} \times 3\sqrt[3]{4} =$$

$$\frac{\sqrt{8} \times \sqrt{5}}{\sqrt{1^0}} =$$

$$\frac{\sqrt[3]{18} \times \sqrt[3]{6^0}}{\sqrt[3]{5}} =$$

## فعالیت

زمینی به شکل مربع داریم که طول قطر آن  $2\sqrt{6}$  متر است. می‌خواهیم مساحت و محیط این زمین را به دست آوریم. راه حل ارائه شده را توضیح دهید و در صورت لزوم آن را کامل کنید.



حل: به کمک رابطه ————— داریم:  $x^2 + x^2 = (2\sqrt{6})^2$

در نتیجه:  $2x^2 = 24$  و از آنجا  $x^2 = 12$

بنابراین ————— این زمین ۱۲ متر مربع است.

از اینجا می‌توان نتیجه گرفت که ————— مربع  $\sqrt{12}$  متر یا  $2\sqrt{3}$

متر است.

همچنین: متر  $8\sqrt{3} = 4 \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$  = مربع —————

اگر قسمت رادیکالی دو عبارت پس از ساده کردن کاملاً یکسان باشد، می‌توان آنها

را با هم جمع یا تفریق کرد؛ مثلاً دو عبارت  $3\sqrt{2}$  و  $7\sqrt{2}$  دارای قسمت‌های رادیکالی

یکسان هستند و داریم:  $7\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$  و  $7\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 10\sqrt{2}$

همچنین:

$$\sqrt{12} + 9\sqrt{3} = 2\sqrt{3} + 9\sqrt{3} = 11\sqrt{3}$$

اما قسمت‌های رادیکالی عبارات  $2\sqrt{5}$  و  $\sqrt{2}$  یا عبارات  $7\sqrt{2}$  و  $\sqrt{2}$  یکسان نیستند.

## کار در کلاس

حاصل جمع هر ستون را مانند نمونه‌ها در سطر آخر بنویسید:

$3\sqrt{7}$	$\frac{3}{2}\sqrt{2}$	$\frac{\sqrt{5}}{2}$	$3\sqrt{a}$	$\sqrt{xy}$	$\sqrt{2}$
$-4\sqrt{5}$	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{5}$	$2\sqrt{b}$	$2\sqrt{x}$	$\sqrt{3}$
$8\sqrt{7}$	$8\sqrt{2}$	$-\frac{2}{3}\sqrt{10}$	$-\frac{1}{5}\sqrt{a}$	$-7\sqrt{x}$	$\sqrt{5}$
$2\sqrt{5}$	$-5\sqrt{2}$	$-2\sqrt{10}$	$-7\sqrt{b}$	$4\sqrt{xy}$	$6\sqrt{2}$
$11\sqrt{7} - 2\sqrt{5}$	$\frac{9}{2}\sqrt{2} + \sqrt{2}$				

## ساده کردن عبارت‌های رادیکالی

### فعالیت

حاصل عبارت‌های زیر را ساده کنید.  
راه حل‌ها را توضیح دهید و آنها را کامل کنید.

$$\text{الف) } \sqrt{72} - \sqrt{32} + \sqrt{18}$$

ابتدا حاصل هر یک از رادیکال‌ها را به دست می‌آوریم:  
(جاهای خالی را کامل کنید.)

$$\sqrt{72} = \sqrt{6^2 \times 2} = 6\sqrt{\quad}$$

$$\sqrt{32} = \sqrt{4^2 \times \quad} = 4\sqrt{\quad}$$

$$\sqrt{18} = \sqrt{\quad} = 3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{72} - \sqrt{32} + \sqrt{18} = 6\sqrt{\quad} - \quad + \quad = 5\sqrt{2} \quad \text{بنابراین:}$$

$$\begin{aligned} \text{ب) } \sqrt{50} + \sqrt[3]{24} + \sqrt[3]{81} &= \sqrt{5^2 \times 2} + \sqrt[3]{2^3 \times 3} + \sqrt[3]{3^3 \times 3} \\ &= 5\sqrt{\quad} + 2\sqrt[3]{\quad} + 3\sqrt[3]{\quad} = 5\sqrt{\quad} + 5\sqrt[3]{\quad} \end{aligned}$$

مثال ۱: حاصل  $\sqrt{48}(\sqrt{3} + \sqrt{2})$  را به دو روش به دست آورده‌ایم؛ آنها را با هم مقایسه کنید.

$$\begin{aligned} \text{الف) } \sqrt{48}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) &= \sqrt{48 \times 3} + \sqrt{48 \times 2} = \sqrt{4^2 \times 3^2} + \sqrt{4^2 \times 3 \times 2} \\ &= \sqrt{(4 \times 3)^2} + 4\sqrt{6} = 12 + 4\sqrt{6} \end{aligned}$$

$$\text{ب) } \sqrt{48}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = \sqrt{4^2 \times 3}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 4\sqrt{3}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 12 + 4\sqrt{6}$$

مثال ۲: حاصل  $(\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{48}) \div \sqrt{3}$  را به دست آورید.

$$\sqrt{12} + \sqrt{27} - \sqrt{48} = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

بنابراین حاصل تقسیم برابر ۱ است. (چرا؟)



حاصل عبارت‌های زیر را ساده کنید.

$$۱) \sqrt{۹۸} - \sqrt{۵۰} + \sqrt{۱۲۸}$$

$$۲) \sqrt{۲۷} - \sqrt{۱۲} - \sqrt{۷۵} + \sqrt{۴۸}$$

$$۳) ۵\sqrt{۲} + ۳\sqrt{۵۴} - ۴\sqrt{۱۲۸}$$

$$۴) \sqrt{۴ + \frac{۱}{۸۱} + \frac{۴}{۹}}$$

$$۵) (\sqrt{۲} + \sqrt{۳})(۳\sqrt{۲} - \sqrt{۳})$$

### گویا کردن مخرج کسرها

گاهی اوقات برای ساده کردن یک عبارت رادیکالی یا آسان‌تر کردن محاسبات، لازم است مخرج یک کسر را از حالت رادیکالی خارج کنیم؛ به‌طور مثال برای محاسبهٔ  $\frac{۲۰}{\sqrt{۲}}$  باید عدد ۲۰ را بر  $\sqrt{۲}$  تقسیم کنیم؛ در حالی که می‌توانیم مخرج کسر را به‌صورت زیر گویا کنیم:

$$\frac{۲۰}{\sqrt{۲}} = \frac{۲۰}{\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{۲۰\sqrt{۲}}{۲} = ۱۰\sqrt{۲}$$

### فعالیت

توضیح دهید که مخرج هر یک از کسرهای زیر چگونه گویا شده است. هر جا لازم است، راه‌حل را کامل کنید.

$$\text{الف) } \frac{۵}{۲\sqrt{۳}} = \frac{۵}{۲\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} = \frac{۵\sqrt{۳}}{۶}$$

$$\text{ب) } \frac{۲}{\sqrt[۳]{۵}} = \frac{۲}{\sqrt[۳]{۵}} \times \frac{\sqrt[۳]{۵^۲}}{\sqrt[۳]{۵^۲}} = \frac{۲\sqrt[۳]{۵^۲}}{۵}$$

$$\text{ج) } \frac{۴}{\sqrt{\frac{۴}{۳}}} = \frac{۴}{\sqrt{\frac{۴}{۳}}} = \frac{۴\sqrt{۳}}{\sqrt{۴}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \frac{۴\sqrt{۳}\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\text{د) } \frac{۲\sqrt[۳]{۷}}{\sqrt[۳]{۲^۲}} \times \frac{\sqrt[۳]{۱۴}}{\sqrt[۳]{۱۴}} = \frac{۲\sqrt[۳]{۱۴}}{۲}$$

$$\text{ه) } \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{x}} \times \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{۲x}}{x} \quad (x > 0)$$

$$\text{و) } \frac{۵}{\sqrt[۳]{z^۲}} \times \frac{\sqrt[۳]{z}}{\sqrt[۳]{z}} = \frac{۵\sqrt[۳]{z}}{z} \quad (z \neq 0)$$

مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

الف)  $\frac{6}{\sqrt{2}}$

ب)  $\frac{2}{\sqrt{32}}$

ج)  $\frac{12}{\sqrt{6}}$

د)  $\frac{5}{\sqrt[3]{3x}}$

( $x \neq 0$ )

## تمرین

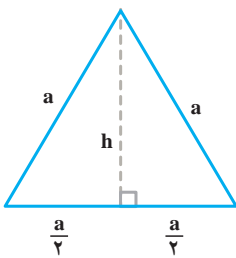
۱- عبارتهای زیر را ساده کنید.

الف)  $2\sqrt{50} + \sqrt{32} + 2\sqrt{72}$       ج)  $\sqrt[3]{27^2}$       ه)  $(\sqrt{2} - \sqrt{5})(\sqrt{10} + \sqrt{2})$

ب)  $\sqrt{8} + \sqrt{128} - \sqrt{50}$       د)  $\sqrt[3]{\frac{-27}{64}}$       و)  $2\sqrt{48} - 3\sqrt{27}$

$2\sqrt{x^2} - x$

۲- اگر  $x < 0$  باشد، حاصل عبارت مقابل را به دست آورید.



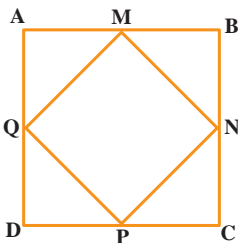
۳- محیط و مساحت مربعی به ضلع  $3\sqrt{5}$  سانتی متر را به دست

آورید.

۴- شکل مقابل یک مثلث متساوی الاضلاع را به ضلع  $a$  نشان

می دهد. اندازه ارتفاع  $h$  را بر حسب  $a$  به دست آورید؛ سپس مساحت

آن را بر حسب  $a$  بنویسید.



۵- نقاط  $M, N, P, Q$  وسطهای اضلاع مربع  $ABCD$

هستند. اگر مساحت مربع  $ABCD$ ،  $100$  مترمربع باشد، محیط مربع

$MNPQ$  چقدر است؟

۶- در جاهای خالی علامت < یا = یا > بگذارید :

$$\sqrt{5} + \sqrt{4} \bigcirc \sqrt{5+4}$$

$$4 \bigcirc \sqrt{3^2 + 2^2}$$

$$\sqrt{\frac{3}{11}} \bigcirc \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}}$$

$$\sqrt{3^2 + 4^2} \bigcirc 5$$

۷- در جاهای خالی عدد مناسب بنویسید :

$$\sqrt{\square} = 10 \quad \text{ب) } 2\sqrt{\square} = 6 \quad \text{ج) } \sqrt{\square} = \frac{1}{3} \quad \text{د) } \sqrt[3]{8} = 2$$

$$\frac{2^{-5}}{2^0} = \sqrt{64} \quad \text{و) } \frac{(\sqrt{12})^2}{4 \times 3^2} = 3^0 \quad \text{ز) } \frac{m^6 \times m^{-2}}{m^0} = m \quad \text{ح) } 9\sqrt{-27} = \frac{0^3}{(-4)^3}$$

۸- مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

$$\text{الف) } \frac{5}{2\sqrt{3}}$$

$$\text{ب) } \frac{2}{\sqrt[3]{a^2}}$$

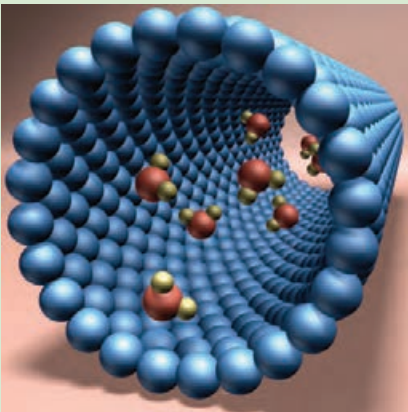
$$\text{ج) } \frac{2}{\sqrt{v}}$$

۹- آیا تساوی  $\sqrt{x^2} = (\sqrt{x})^2$  همیشه درست است؟ توضیح دهید.

الف) تساوی همیشه درست است. ب) تساوی همیشه نادرست است. ج) اگر  $x \geq 0$ ، تساوی

درست است.

## خواندنی



فناوری نانو مجموعه‌ای از فرایندهای تفکیک، ادغام و تشکیل مواد در حد یک اتم یا مولکول است. یک نانومتر برابر  $10^{-9}$  متر؛ یعنی صدهزار برابر از قطر موی سر انسان کوچک‌تر است. کشور عزیز ما ایران بین ده کشور برتر در حوزه فناوری نانو قرار دارد.