

زاویه‌های محاطی و مرکزی و ارتباط آنها با کمان‌ها در دایره، کاربرد بسیاری در طراحی نقش فرش‌ها و دیگر صنایع دستی و معماری دارد.

در تصویر بالا نمای داخلی سقف آرامگاه حکیم خیام نیشابوری را مشاهده می‌کنید. خیام، فیلسوف، ریاضی‌دان، ستاره‌شناس و رباعی‌سرای ایرانی قرن پنجم هجری شمسی است. یکی از برجسته‌ترین کارهای وی اصلاح گاهشماری ایران در زمان وزارت خواجه نظام الملک در دوره سلجوقی است.



.O

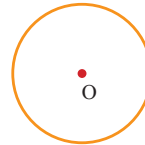
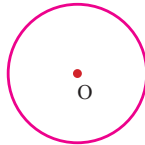
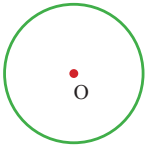
۱- پنج نقطه پیدا کنید که فاصله هر کدام از نقطه O، ۲ سانتی متر باشد.

اگر این نقطه‌ها را بیشتر و بیشتر کنیم، چه شکلی ایجاد می‌شود؟

۲- دو خط متمایز در صفحه، یا موازی اند یا متقاطع؛ یعنی یا نقطه مشترکی ندارند یا در یک نقطه، یکدیگر را قطع می‌کنند.



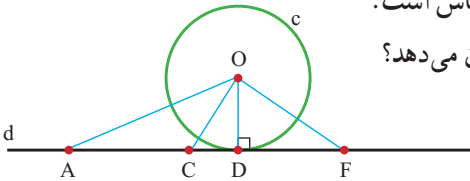
حالا سه وضعیت مختلف یک خط و یک دایره را رسم کنید و در هر حالت، مشخص کنید که خط و دایره چند نقطه مشترک دارند.



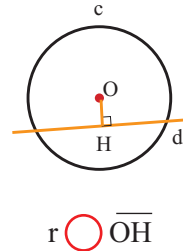
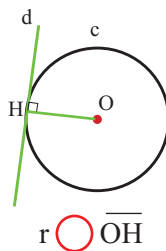
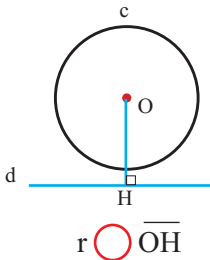
در حالتی که خط و دایره تنها یک نقطه مشترک دارند، می‌گوییم خط بر دایره مماس است.

۳- فاصله یک نقطه از یک خط، طول کوتاه‌ترین پاره‌خطی است که آن نقطه را به خط وصل می‌کند.

خط d بر دایره c به مرکز O و شعاع r مماس است. کدام پاره‌خط فاصله مرکز دایره از خط d را نشان می‌دهد؟ اندازه این پاره‌خط را با r مقایسه کنید.



۴- در هر یک از شکل‌های زیر، دایره‌ای به شعاع r رسم کرده‌ایم. فاصله مرکز دایره از خط d را \overline{OH} بنامید و بدون اندازه‌گیری، رابطه‌های زیر را با علامت $>$ ، $=$ یا $<$ کامل کنید.

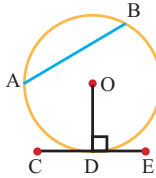
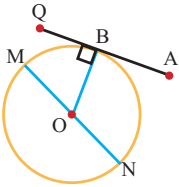


شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود است.

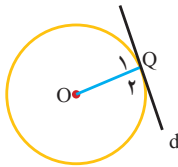
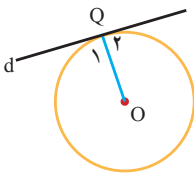
کار در کلاس



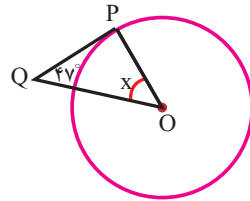
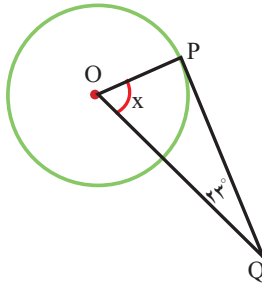
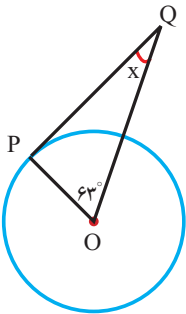
۱- در هر شکل، کدام پاره خط بر دایره مماس است؟



۲- در هر شکل، خط بر دایره مماس است. زاویه Q_1 چه نوع زاویه‌ای است؟



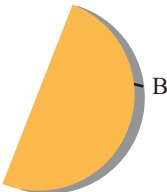
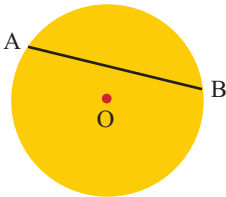
۳- در هر شکل، PQ بر دایره مماس است. اندازه زاویه خواسته شده را پیدا کنید.



فعالیت

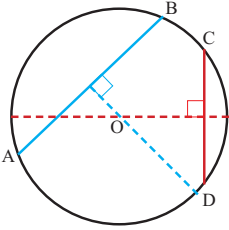


۱- مانند شکل، روی یک ورق کاغذ دایره‌ای رسم کنید؛ سپس، صفحه دایره‌ای شکل را با قیچی جدا کنید. دو نقطه A و B را روی دایره قرار دهید. A را به B وصل کنید. این پاره خط **وتر دایره** نامیده می‌شود. دایره را طوری تا کنید که نقاط A و B روی هم قرار بگیرند. نای کاغذ را باز کنید.



روی خط تا را با مداد پررنگ کنید. در هندسه به این پاره خط چه می‌گویند؟ روی دایره، وتر دیگری رسم کنید و همین مراحل را برای آن تکرار کنید. دو پاره خط رسم شده، یکدیگر را در چه نقطه‌ای قطع می‌کنند؟

۲- نتیجه فعالیت (۱) را به کمک شکل روبه‌رو توضیح دهید.



۳- قطعه‌ای از یک بشقاب قدیمی پیدا شده است.

تصویر آن را در شکل روبه‌رو می‌بینید.

با توجه به فعالیت‌های قبل، توضیح دهید که چگونه می‌توانیم اندازه قطر این بشقاب را مشخص کنیم.



۴- دایره‌ای به مرکز O با وتر AB داریم. دو متن زیر را بخوانید و نتیجه هر یک از آنها را کامل کنید.

این دو چه تفاوتی دارند؟ درباره آن با دوستانتان گفت‌وگو کنید.

<p>وسط AB را M می‌نامیم و O را به M وصل می‌کنیم. پس دو مثلث AOM و BOM در حالت سه ضلع با هم برابرند؛ پس $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ و چون حاصل جمع این دو زاویه 180° درجه است، پس هر کدام از آنها 90° درجه است.</p>	<p>خطی از O بر AB عمود می‌کنیم و پای عمود را H می‌نامیم. دو زاویه H_1 و H_2 قائمه‌اند؛ پس دو مثلث قائم‌الزاویه AOH و BOH در حالت وتر و یک ضلع برابرند؛ پس $\overline{AH} = \overline{BH}$</p>

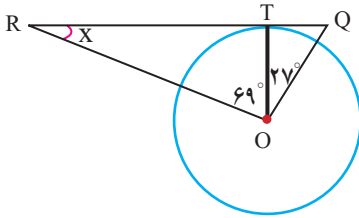
نتیجه: خطی که از مرکز دایره بر وتر عمود می‌شود، آن وتر را

و برعکس، پاره خطی که مرکز دایره را به وسط وتر وصل می‌کند.

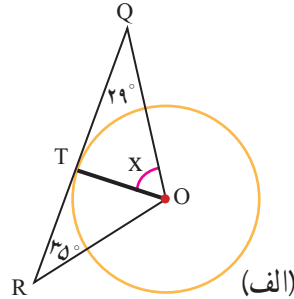
کارد در کلاس



۱- در هر شکل، RQ بر دایره مماس است. اندازه زاویه مجهول را پیدا کنید.

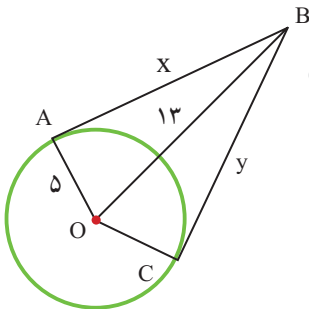
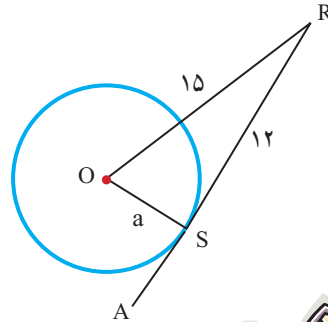
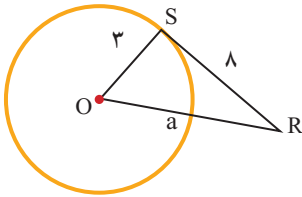


(ب)



(الف)

۲- در هر شکل، SR بر دایره مماس است. مقدار a را به دست آورید.



تمرین



۱- نقطه B در فاصله ۱۳ سانتی متری مرکز دایره‌ای به شعاع ۵ سانتی متر قرار دارد.

از این نقطه دو مماس بر دایره رسم کرده ایم.

فاصله B از هر یک از نقاط تماس را به دست آورید.

۲- از نقطه O' خارج دایره‌ای به مرکز O دو مماس بر دایره رسم کنید و نقاط تماس را A و B

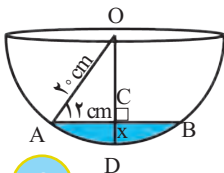
بنامید. شکل بکشید و دلیل هر یک از موارد زیر را بنویسید.

(الف) چرا $\overline{O'A} = \overline{O'B}$ ؟

(ب) چرا OO' نیمساز \hat{O} است؟

۳- در کاسه‌کروی رو به رو مقداری آب ریخته ایم،

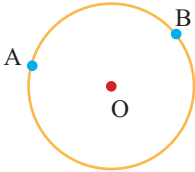
\overline{AB} برابر ۲۴ سانتی متر شده است. حداکثر عمق آب چقدر است؟





۱- ساعت‌های روبه‌رو چه زمانی را نشان می‌دهند؟
پنج دقیقه بعد، هر یک از ساعت‌ها چه زمانی را نشان می‌دهد؟
در این مدت، عقربه دقیقه‌شمار چند درجه حرکت کرده است؟
در هر یک از ساعت‌ها مسیر حرکت عقربه دقیقه‌شمار را رنگ کنید. نوک کدام عقربه مسیر

طولانی‌تری را طی کرده است؟



۲- الف) دو نقطه A و B دایره را به دو کمان تقسیم کرده‌اند.

کمان کوچک‌تر را با \widehat{AB} نمایش می‌دهیم و آن را کمان AB می‌نامیم.

آیا ممکن است دو نقطه، دایره را به دو کمان مساوی تقسیم کنند؟ توضیح دهید.

ب) مرکز دایره را به دو سر کمان وصل کنید.

زاویه AOB زاویه مرکزی روبه‌رو به کمان AB نامیده می‌شود.

کمان AB نیز روبه‌رو به زاویه مرکزی AOB است.

۳- شکل روبه‌رو به شش قسمت مساوی تقسیم شده است.

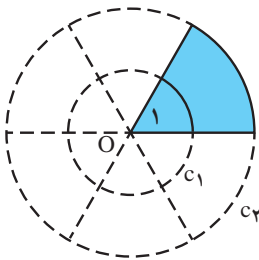
زاویه O_1 چه کسری از 360° درجه است؟

کمان روبه‌رو به O_1 در دایره C_1 چه کسری از دایره C_1 است؟

کمان روبه‌رو به O_1 در دایره C_2 چه کسری از دایره C_2 است؟

آیا این دو کسر با هم مساوی‌اند؟

آیا طول این دو کمان مساوی است؟



اندازه کمان AB؛ با اندازه زاویه مرکزی روبه‌رو به آن برابر است؛ بنابراین، ممکن است دو

کمان با اندازه‌های مساوی، طول‌های متفاوتی داشته باشند.

۴- چرا در فعالیت (۳) اندازه کمان روبه‌رو به O_1 در هر یک

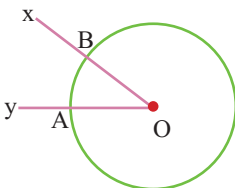
از دایره‌های C_1 و C_2 برابر 60° درجه است؟

۵- در شکل رو به رو زاویه XOY برابر 36° درجه است.

کمان AB چند درجه است؟

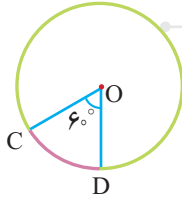
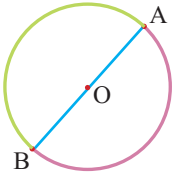
طول کمان AB چه کسری از دایره است؟

برای پاسخ دادن به این پرسش از تساوی روبه‌رو کمک بگیرید.



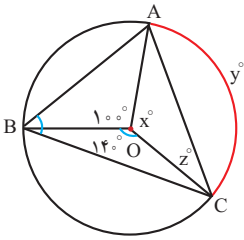
$$\frac{\text{اندازه کمان AB}}{360^\circ} = \frac{\text{طول کمان AB}}{\text{محیط دایره}}$$

کار در کلاس

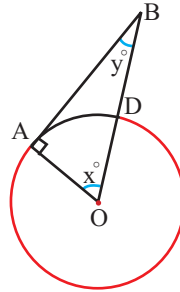


۱- هر دایره به دو کمان تقسیم شده است.
اندازه هر کمان را پیدا کنید و بنویسید.

۲- اندازه کمان و زاویه‌های مجهول را پیدا کنید.

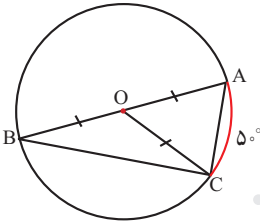


(ب)



(الف)

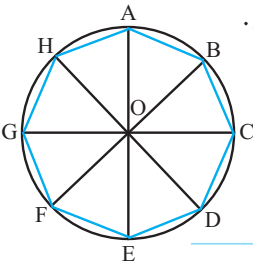
۳- در شکل روبه‌رو، AB قطر دایره است.
زاویه B چند درجه است؟



فعالیت



۱- محیط دایره روبه‌رو را به هشت کمان مساوی تقسیم کرده‌ایم.



می‌خواهیم بدانیم چرا هشت ضلعی ABCDEFGH منتظم است.

رضا برای اثبات این مطلب دلایل زیر را بیان می‌کند:

«مثلث‌های AOB، BOC، COD و ... متساوی‌الساقین اند.»

چرا؟

و $\hat{O}_1 = \hat{O}_2 = \hat{O}_3 = \dots$ پس همه زاویه‌های سبز رنگ با هم برابرند.

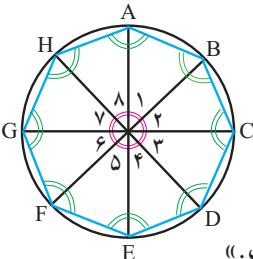
چرا؟

پس همه زاویه‌های هشت ضلعی با هم برابرند. چرا؟»

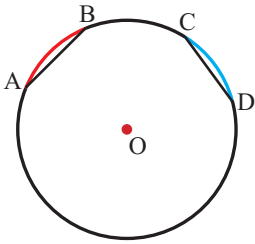
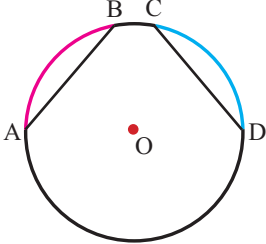
آرش می‌گوید: «ولی این تنها برابری زاویه‌ها را نشان می‌دهد»

و ما باید دلایلی هم برای مساوی بودن ضلع‌های هشت ضلعی

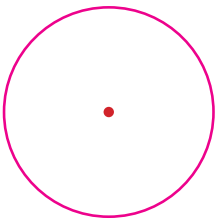
پیدا کنیم تا بتوانیم بگوییم که هشت ضلعی ABCDEFGH منتظم است.»



بعد ادامه می‌دهد: «مثلث‌های $\triangle AOB$ ، $\triangle BOC$ ، $\triangle COD$ و ... هم نهشت‌اند؛ در چه حالتی؟ _____ پس $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \dots$ یعنی ضلع‌های هشت ضلعی هم مساوی‌اند.»
 هر جا لازم است، توضیحاتی به دلایل رضا و آرش اضافه کنید تا دلیل منتظم بودن هشت ضلعی کامل شود.
 ۲- برای هر مورد دلیل بیاورید.

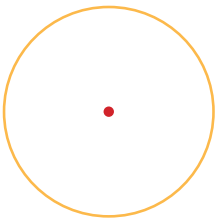
<p>(ب) فرض کنید $\overline{AB} = \overline{CD}$. چرا $\overline{AB} = \overline{CD}$؟</p> 	<p>(الف) فرض کنید $\overline{AB} = \overline{CD}$. چرا $\overline{AB} = \overline{CD}$؟</p> 
--	--

نتیجه این فعالیت را در دو جمله بنویسید.
 اگر در یک دایره، اندازه دو کمان برابر باشد، _____
 به عکس، اگر در یک دایره اندازه دو وتر برابر باشد، _____



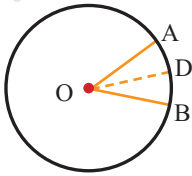
۱- با استفاده از خط‌کش و نقاله در دایره روبه‌رو یک پنج ضلعی منتظم رسم کنید.

۲- الف) دهانهٔ پرگار را به اندازه شعاع دایره زیر باز کنید. از یک نقطهٔ دایره، شروع کنید و بی‌درپی کمان بزنید.



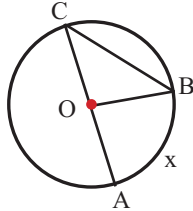
- ب) بدین ترتیب، دایره به چند کمان تقسیم می‌شود؟
 ج) چرا این کمان‌ها با هم مساوی‌اند؟
 د) هر کمان چند درجه است؟
 ه) چند کمان ۱۲° درجه در شکل دیده می‌شود؟

تمرین



۱- OD نیمساز زاویه مرکزی AOB است و $\hat{AOB} = 36^\circ$.

اندازه هر یک از کمان‌های AD و BD چند درجه است؟



۲- کمان AB برابر x درجه است.

اندازه زاویه AOB را بر حسب x به دست آورید.

اندازه زاویه ACB را بر حسب x به دست آورید.

۳- متحرکی از نقطه A روی دایره‌ای به شعاع یک سانتی متر شروع به حرکت می‌کند. در هر

شکل، کمان طی شده مشخص شده است. جدول را کامل کنید.

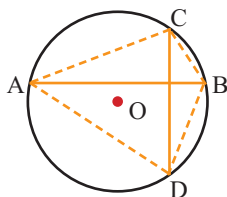
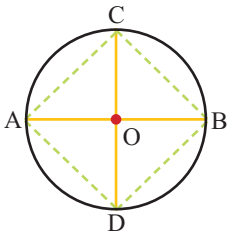
شکل					
کسر طی شده از دایره					
اندازه کمان طی شده			180°	90°	
طول تقریبی کمان طی شده			$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{4}$	
	$2\pi = \text{محیط}$				

۴- قطرهای AB و CD بر هم عمودند.

الف) چرا کمان‌های AC، CB، BD و DA با هم مساوی‌اند؟

ب) آیا وترهای AC، CB، BD و DA نیز با هم مساوی‌اند؟

ج) آیا زاویه‌های چهارضلعی ABCD با هم مساوی‌اند؟ چرا؟



۵- در شکل روبرو، وترهای AB و CD بر هم عمودند.

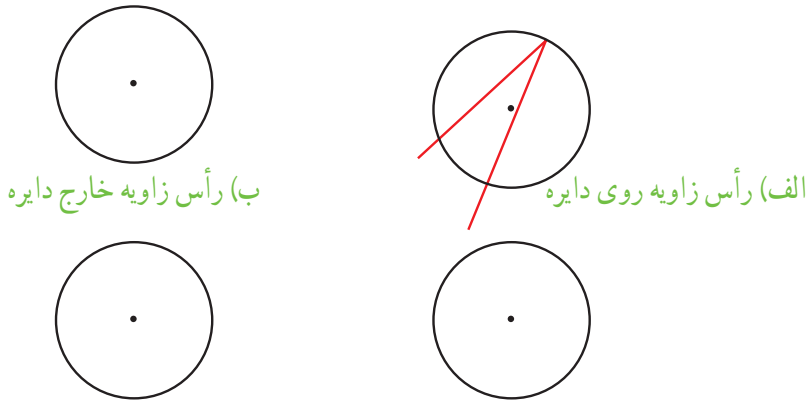
الف) آیا کمان‌های AC، CB، BD و DA با هم مساوی‌اند؟

ب) پاسختان را با پاسخ تمرین قبل مقایسه کنید.

این دو تمرین چه تفاوتی دارند؟



۱- مانند نمونه رسم شده (الف) در شکل‌های زیر نمونه‌ای از هر یک از وضعیت‌های مختلف یک زاویه و دایره را رسم کنید.

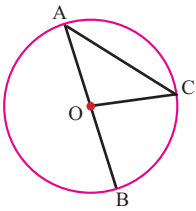


(الف) رأس زاویه روی دایره (ب) رأس زاویه خارج دایره (ج) رأس زاویه در مرکز دایره (د) رأس زاویه داخل دایره در نقطه‌ای غیر از مرکز

در کدام وضعیت زاویه مرکزی نشان داده شده است؟

به زاویه‌ای که در شکل «الف» مشاهده می‌کنید، زاویه محاطی گفته می‌شود. رأس این زاویه

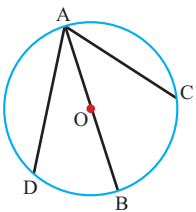
روی دایره است و ضلع‌های آن، دایره را قطع کرده‌اند.



۲- اندازه زاویه مرکزی BOC را بر حسب \widehat{BC} بنویسید : $\widehat{BOC} =$

چرا زاویه‌های A و C در مثلث AOC با هم برابرند؟

چه ارتباطی میان زاویه BOC و این دو زاویه وجود دارد؟

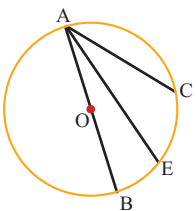


۳- اندازه زاویه محاطی BAC را بر حسب \widehat{BC} بنویسید. $\widehat{BAC} =$

۳- با توجه به فعالیت قبل با پر کردن جاهای خالی

اندازه زاویه محاطی DAC را بر حسب \widehat{DC} بنویسید.

$$\widehat{DAC} = \widehat{DAB} + \widehat{BAC} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{1}$$



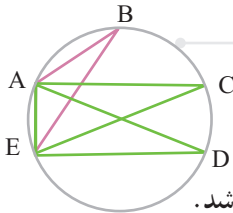
۴- با پر کردن جاهای خالی، اندازه زاویه محاطی EAC

را هم بر حسب \widehat{EC} بنویسید.

$$\widehat{EAC} = \widehat{BAC} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{0}{2}$$

۵- پاسخ فعالیت‌های (۲)، (۳) و (۴) را با هم مقایسه کنید. آیا در این سه فعالیت، همه حالت‌های زاویه محاطی بررسی شده‌اند؟ عبارت زیر را کامل کنید.
اندازه هر زاویه محاطی برابر است با _____

کار در کلاس



۱- با توجه به شکل روبه‌رو،

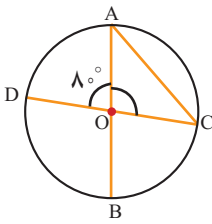
الف) زاویه‌های محاطی مقابل به \widehat{AE} را پیدا کنید.

ب) دو زاویه محاطی دیگر رسم کنید که \widehat{AE} کمان مقابل به آنها نیز باشد.

۲- در شکل روبه‌رو، اندازه زاویه محاطی C را تعیین کنید.

دو دانش‌آموز به این سؤال جواب داده‌اند.

راه‌حل‌های آنها را توضیح دهید.



فاطمه

$$\hat{O} = 8^\circ \longrightarrow \widehat{AD} = 8^\circ$$

$$\hat{C} = \frac{\widehat{AD}}{2} = \frac{8^\circ}{2} = 4^\circ$$

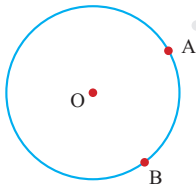
زهرا

$$\hat{O}_1 = 180^\circ - 8^\circ = 172^\circ$$

$$\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ - 172^\circ = 8^\circ$$

$$\hat{A} = \hat{C} = \frac{8^\circ}{2} = 4^\circ$$

فعالیت



۱- یک زاویه محاطی مقابل به کمان AB رسم کنید.

سه زاویه محاطی دیگر مقابل به همین کمان رسم کنید.

فکر می‌کنید چند زاویه دیگر می‌توان رسم کرد؟ چرا؟

آیا همه این زاویه‌های رسم شده با هم برابرند؟ چرا؟

۲- قطر AB دایره را به دو کمان تقسیم کرده است.

اندازه هر کمان چند درجه است؟ چرا؟

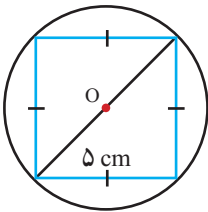
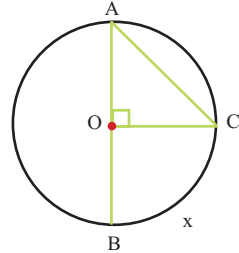
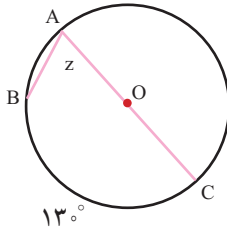
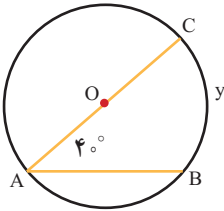
چند زاویه محاطی مقابل به کمان AB رسم کنید.

چند زاویه محاطی می‌توان رسم کرد؟ چرا؟

اندازه این زاویه‌های محاطی مقابل قطر چند درجه است؟ چرا؟

کارد در کلاس

۱- اندازه زاویه‌ها و کمان‌های خواسته شده را پیدا کنید.



۲- در شکل روبه‌رو، همه رأس‌های یک لوزی به ضلع ۵ سانتی‌متر

روی دایره قرار دارد.

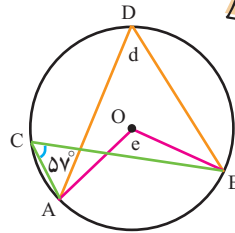
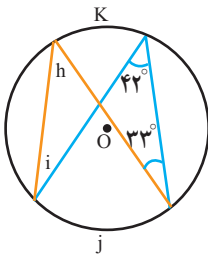
چرا این لوزی، مربع است؟

قطر دایره چند سانتی‌متر است؟



تمرین

۱- اندازه زاویه‌ها و کمان‌های مجهول را پیدا کنید.



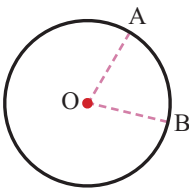
۲- در شکل زیر زاویه مرکزی AOB برابر با ۷۲ درجه است. اندازه کمان AB چند درجه

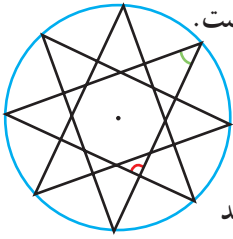
است؟

اگر، دهانه برگار را به اندازه AB باز کنیم و با شروع

از نقطه B، بی‌دربی کمان‌هایی بزنیم، چند کمان

مساوی روی دایره جدا می‌شود؟





۳- در شکل روبه‌رو، دایره‌ای به هشت قسمت مساوی تقسیم شده است.

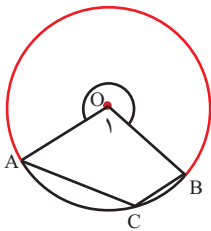
(الف) شکل چند خط تقارن دارد؟

(ب) اندازه دو زاویه مشخص شده را روی شکل پیدا کنید و بنویسید.

۴- دایره‌ای بکشید. سپس، چهارضلعی ABCD را طوری رسم کنید

که هر چهار رأس آن روی دایره باشد.

چرا مجموع دو زاویه روبه‌رو به هم در چهارضلعی ABCD برابر 180° درجه است؟



۵- در شکل روبه‌رو اندازه کمان AB برابر x درجه است.

(الف) اندازه زاویه O_1 را بر حسب x بنویسید.

(ب) اندازه کمان قرمز رنگ را بر حسب x بنویسید.

(ج) اندازه زاویه C را بر حسب x بنویسید.

۶- در شکل زیر، پره‌ها دوازده کمان مساوی روی محیط چرخ ایجاد کرده‌اند.

شعاع چرخ 30° سانتی‌متر است.

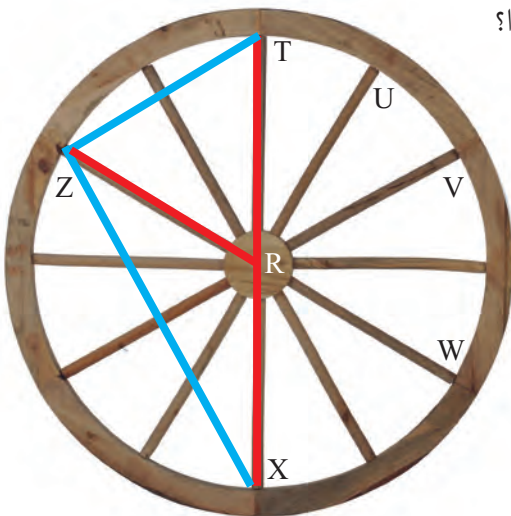
(الف) طول چقدر است TX؟

(ب) مثلث ZRT چه نوع مثلثی است؟ چرا؟

(ج) طول چقدر است ZT؟

(د) مثلث XTZ چه نوع مثلثی است؟ چرا؟

(ه) طول چقدر است ZX؟



مفاهیم و مهارت‌ها

در این فصل اصطلاحات زیر به کار رفته‌اند، مطمئن شوید که می‌توانید با جمله‌های خود، آنها را تعریف کنید و برای هر کدام مثالی بزنید.

- خط مماس
- زاویه مرکزی
- زاویه محاطی

در این فصل، روش‌های اصلی زیر مطرح شده‌اند، با یک مثال هر کدام را توضیح دهید و در دفتر خود خلاصه درس را بنویسید.

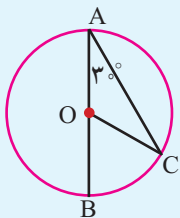
- پیدا کردن مرکز دایره
- تساوی کمان‌ها و وترهای متناظر
- رسم خط مماس بر دایره
- رسم چندضلعی منتظم به کمک زاویه مرکزی
- پیدا کردن زاویه محاطی با توجه به کمان روبه‌روی آن

کاربرد

رسم چندضلعی‌های منتظم به کمک مفاهیم زاویه مرکزی یکی از کاربردهای مهم این درس در طراحی شکل‌های تزئینی و معماری است.

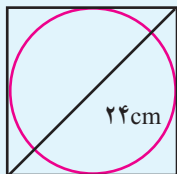
تمرین‌های ترکیبی

۱- با توجه به شکل روبه‌رو، اندازه زاویه‌ها و کمان‌های زیر را بنویسید.



$$\hat{C} = \dots\dots\dots, \widehat{COB} = \dots\dots\dots, \widehat{BC} = \dots\dots\dots$$

۲- کاغذی مربعی شکل به قطر ۲۴ سانتی‌متر داریم. مطابق شکل، بزرگ‌ترین دایره‌ای را که می‌توانستیم روی آن رسم کردیم. قطر این دایره را حساب کنید.



۳- الف) در شکل زیر، ضلع‌های روبه‌رو به هم در چهارضلعی با هم برابرند.

چرا چهارضلعی مستطیل است؟

ب) شعاع دایره برابر ۵ و عرض مستطیل برابر $\sqrt{19}$ سانتی‌متر است.

طول مستطیل را به دست آورید.

