گروه آموزشی کلاسویچ

Classwich.ir

نمونه سوالات تشریحی

از مبحث کاربرد مشتق

به همراه پاسخ کاملا تشریحی

فصل پنجم ریاضی دوازدهم

تهیه کننده : عرفان خیامی

۱- اگر نقطه‌ی (۱ , ۲)، نقطه‌ی اکسترمم نسبی تابع $f(x) = x^{۳} + bx^{۲} + d$ باشد، مقادیر b و d را به دست آورید.

« **پاسخ** »

$$f(x) = x^{۳} + bx^{۲} + d \xrightarrow{(۲\,,\,۱)} ۱ = ۸ + ۴b + d \Rightarrow ۴b + d = -۷ \quad (۱)$$

$$f'(x) = ۳x^{۲} + ۲bx = ۰ \xrightarrow{x = ۲} ۱۲ + ۴b = ۰ \Rightarrow b = -۳ \xrightarrow{(۱)} ۴(-۳) + d = -۷$$
$$\Rightarrow d = ۵$$

۲- مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق توابع زیر را در بازه‌های مشخص شده، در صورت وجود به دست آورید.

الف) $f(x) = -۲x^{۳} + ۹x^{۲} - ۱۳ \quad ; \quad x \in [-۱\,,\,۲]$

ب) $g(x) = x^{۳} + ۲x - ۵ \quad ; \quad x \in [-۲\,,\,۱]$

« **پاسخ** »

الف) $f(x) = -۲x^{۳} + ۹x^{۲} - ۱۳ \quad ; \quad x \in [-۱\,,\,۲]$

$$f'(x) = -۶x^{۲} + ۱۸x = ۰ \Rightarrow -۶x(x - ۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = ۳ \quad \text{ق ق ن} \end{cases}$$

$x = -۱ \Rightarrow y = -۲$

$x = ۰ \Rightarrow y = -۱۳$

$x = ۲ \Rightarrow y = ۷$

$\underset{\text{مطلق}}{\min(۰\,,\,-۱۳)} \qquad \underset{\text{مطلق}}{\max(۲\,,\,۷)}$

ب) $g(x) = x^{۳} + ۲x - ۵ \quad ; \quad x \in [-۲\,,\,۱]$

$$g'(x) = ۳x^{۲} + ۲ = ۰ \Rightarrow x^{۲} = -\frac{۲}{۳} \quad \text{ق ق ن}$$

$x = -۲ \Rightarrow y = -۱۷$

$x = ۱ \Rightarrow y = -۲$

$\underset{\text{مطلق}}{\min(-۲\,,\,-۱۷)} \qquad \underset{\text{مطلق}}{\max(۱\,,\,-۲)}$

۳- نقاط بحرانی توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $f(x)=\sqrt{۴-x^۲}$

ب) $g(x)=x^۳+۳x^۲-۴$

پ) $h(x)=\sqrt[۳]{x}$

« **پاسخ** »

الف) $f(x)=\sqrt{۴-x^۲} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{-۲x}{۲\sqrt{۴-x^۲}}=\dfrac{-x}{\sqrt{۴-x^۲}}$ نقطه بحرانی $x=۰ \Rightarrow (۰\ ,\ ۲)$

همچنین نقاط ابتدا و انتهای دامنه $D_f=[-۲,۲]$ نیز نقاط بحرانی هستند در نتیجه این تابع سه نقطه بحرانی دارد:

سه نقطه بحرانی $\Leftarrow (۲.۰),(-۲,۰),(۰,۲)$

ب) $g(x)=x^۳+۳x^۲-۴ \Rightarrow g'(x)=۳x^۲+۶x \xrightarrow{g'(x)=۰} ۳x^۲+۶x=۰$

$\Rightarrow x=۰\ ,\ x=-۲$

نقاط بحرانی: $(۰\ ,\ -۴)\ ,\ (-۲\ ,\ ۰)$

پ) $h(x)=\sqrt[۳]{x} \Rightarrow h'(x)=\dfrac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}$ در $x=۰$ مشتق‌پذیر نیست و نقطه $(۰\ ,\ ۰)$ نقطه بحرانی است

۴- بزرگ‌ترین بازه از R که تابع $f(x)=x^۳-۱۲x+۴$ در آن نزولی اکید باشد، کدام است؟ چرا؟

« **پاسخ** »

$f'(x)=۳x^۲-۱۲ \xrightarrow{f'(x)=۰} ۳x^۲-۱۲=۰ \Rightarrow x^۲=۴ \Rightarrow x=\pm ۲$

x	$-\infty$		-۲		۲		$+\infty$
f'		+	•	-	•	+	
f			۲۰		-۱۲		

بزرگ‌ترین بازه که تابع در آن نزولی اکید است بازه $(-۲\ ,\ ۲)$ است.

۵- اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x)=۲x^۳+۳x^۲-۱۲x$ را در بازه‌ی $[-۱,۳]$ به دست آورید.

« **پاسخ** »

$$f'(x)=۶x^۲+۶x-۱۲ \Rightarrow \underbrace{f'(x)=x^۲+x-۲=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-۲\notin[-۱\ ;\ ۳] \\ x=۱ \end{cases}}_{۰/۷۵}$$

$f(۱)=-۷\ ,\ f(-۱)=۱۳\ ,\ f(۳)=۴۵$

$(۱\ ,\ -۷)$ مینیمم مطلق و نقطه $(۳\ ,\ ۴۵)$ ماکزیمم مطلق (هر قسمت ۰/۲۵)

۶- الف) جدول تغییرات تابع $f(x) = ۲x^۳ + ۳x^۲ - ۱۲x$ را رسم و نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی آن‌را مشخص کنید.
ب) نقاط بحرانی تابع f و اکسترمم مطلق این تابع را در بازه‌ی $(-۱ , ۳)$ مشخص کنید.

« پاسخ »

الف) تکمیل جدول نیم نمره

x		-۲		۱	
f'	+		-		+
		Max		Min	

$$f'(x) = ۶x^۲ + ۶x - ۱۲ = ۰ \begin{cases} x = ۱ \\ x = -۲ \end{cases} (۰/۵)$$

ب)

$$f(۱) = -۷$$
$$f(-۲) \notin [-۱ , ۳] \quad (۰/۲۵) \Rightarrow \min : (۱ , -۷) \ (۰/۲۵) , \max : (۳ , ۴۵) \ (۰/۲۵)$$
$$f(-۱) = ۱۳$$
$$f(۳) = ۴۵$$

نقطه بحرانی: $(۱ , -۷) \quad (۰/۲۵)$

۷- ضرایب a و b را در تابع $f(x) = -x^۴ + ax + b$ طوری تعیین کنید که در نقطه $(۱ , ۲)$ ماکزیمم نسبی داشته باشد.

« پاسخ »

$$f'(x) = -۴x^۳ + a \quad (۰/۲۵) \xrightarrow{f'(۱) = ۰} -۴ + \alpha = ۰ \quad (۰/۲۵) \Rightarrow a = ۴ \quad (۰/۲۵)$$
$$f(۱) = ۲ \quad (۰/۲۵) \Rightarrow -۱ + ۴ + b = ۲ \quad (۰/۲۵) \Rightarrow b = -۱ \quad (۰/۲۵)$$

۸- مقادیر ماکسیمم و مینیمم تابع $f(x) = x+۱ + \frac{۴}{x+۱}$ را در بازه‌ی $[۰,۲]$ در صورت وجود بیابید.

« پاسخ »

$$f'(x)=۱- \frac{۴}{(x+۱)^۲} \ ۰/۲۵ \xrightarrow{f'=۰} \begin{cases} x=-۳ \ ۰/۲۵ \text{ غ ق ق} \\ x=۱ \ ۰/۲۵ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(۰)=۵ \text{ ماکسیمم مقدار } ۰/۲۵ \\ f(۱)=۴ \text{ مینیمم مقدار } ۰/۲۵ \\ f(۲) = \frac{۱۳}{۲} \ ۰/۲۵ \end{cases}$$

-۹ نقاط اکسترمم مطلق تابع $f(x) = x^{۳} - ۳x + ۱$ را در بازه $\left[-\frac{۳}{۲}, ۳\right]$ به دست آورید.

« **پاسخ** »

$D = R \quad f'(x) = ۳x^{۲} - ۳$ ۰/۲۵

$f'(x) = ۰ \rightarrow \begin{cases} x = ۱ & \text{قابل قبول} \\ x = -۱ & \text{قابل قبول} \end{cases}$ ۰/۲۵ ، ۰/۲۵

ماکسیمم مطلق ۰/۲۵ $f(۳) = ۱۹ \quad f\left(\frac{-۳}{۲}\right) = \frac{۱۷}{۸} \quad f(-۱) = ۳$ مینیمم مطلق ۰/۲۵ $f(۱) = -۱$

-۱۰ نقاط بحرانی تابع $f(x) = \sqrt{-x^{۲} + ۴x}$ را پیدا کنید.

« **پاسخ** »

$D = [۰ , ۴]$ ۰/۲۵

$f'(x) = \frac{-۲x + ۴}{۲\sqrt{-x^{۲} + ۴x}}$ ۰/۵

$-۲x + ۴ = ۰ \rightarrow x = ۲$ ۰/۲۵ قابل قبول

$-x^{۲} + ۴x = ۰ \rightarrow \begin{cases} x = ۰ & \text{غیرقابل قبول} \\ x = ۴ & \text{غیرقابل قبول} \end{cases}$ ۰/۲۵ ، ۰/۲۵

-۱۱ نقاط بحرانی تابع $f(x) = \sqrt[۳]{x^{۲} - ۱}$ را تعیین کنید.

« **پاسخ** »

$D_f = R$ ۰/۲۵ $, \; f'(x) = \frac{۲x}{۳\sqrt[۲]{(x^{۲} - ۱)^{۲}}}$ ۰/۵ $\Rightarrow$

$\begin{cases} f'(x) = ۰ \Rightarrow x = ۰ \\ f'(x) \text{ ت.ن} \Rightarrow x = \pm ۱ \end{cases}$ ۰/۲۵ ، ۰/۵ $\Rightarrow$ نقاط بحرانی $\{۰, ۱ , -۱\}$

۱۲- جهت تغییرات و مقدار ماکسیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع $y = x^۳ - \frac{۹}{۲}x^۲ - ۱۲x + ۱$ را در بازه‌ی $[-۲,۳]$ مشخص کنید.

« **پاسخ** »

$$y = x^۳ - \frac{۹}{۲}x^۲ - ۱۲x + ۱ \Rightarrow y' = ۳x^۲ - ۹x - ۱۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۱ \\ x = ۴ \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

x	-۲		-۱		۳
y'		+	۰	—	
y	-۱	↗	$\frac{۱۵}{۲}$	↘	$-\frac{۹۷}{۲}$

مطلق $max = \frac{۱۵}{۲}$

مطلق $min = -\frac{۹۷}{۲}$

۱۳- نقاط بحرانی تابع $f(x)=\sqrt{۴-x^۲}$ را در صورت وجود تعیین کنید.

« **پاسخ** »

$D_f=[-۲,۲]$ (۰/۲۵) , $f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{۴-x^۲}}$ (۰/۲۵) $\Rightarrow f'(۰)=۰$, $f'(۲)$, $f'(-۲)$ (۰/۲۵) وجود ندارد در نتیجه

$x=۰$, $۲,-۲$ بحرانی هستند.

۱۴- تابع $y=x-۲\sqrt{x}$ در کدام بازه صعودی اکید است؟

« **پاسخ** »

$$y'=۱-\frac{۱}{\sqrt{x}} \text{ (۰/۲۵) } \xrightarrow{y'=۰} \frac{۱}{\sqrt{x}}=۱ \Rightarrow x=۱ \text{ (۰/۲۵) } , \quad D_f=[۰,+\infty) \text{ (۰/۲۵)}$$

x	۰		۱		$+\infty$
y'		-	۰	+	
y	۰	↘	-۱	↗	$+\infty$

(۰/۵)

در بازه‌ی $[۱,+\infty)$ صعودی است (۰/۲۵).

۱۵- تابع $f(x) = x^۳ - ۳x^۲ - ۹x$ را در نظر بگیرید. با استفاده از آزمون مشتق اول، بازه‌هایی که تابع بر آن‌ها اکیداً صعودی است را مشخص کنید.

« **پاسخ** »

$f' = ۳x^۲ - ۶x - ۹ = ۳(x - ۳)(x + ۱) = ۰ \Rightarrow x = ۳ \ , \ x = -۱$

x	$-\infty$	-۱		۳		$+\infty$
y'	+		−		+	
y	↗		↘		↗	

روی بازه‌ی $(۳ , +\infty)$ اکیداً صعودی

روی بازه‌ی $(-\infty , -۱)$ اکیداً صعودی

۱۶- تابع $y = x + \frac{۱}{x}$ در کدام بازه‌ی صعودی و در کدام بازه نزولی است؟

« **پاسخ** »

$f'(x) = ۱ - \frac{۱}{x^۲} = \frac{x^۲ - ۱}{x^۲}$ ۰/۲۵ $\xrightarrow{f'(x) = ۰} x = \pm ۱$

x	$-\infty$	-۱		۰		۱		$+\infty$
y'	+	۰	-	┆	-	۰	+	

۰/۲۵

تابع در بازه‌های $(۱,+\infty)$ و $(-\infty , -۱)$ صعودی ۰/۵ و در بازه‌ی (۱ و ۰) و (۰ و ۱-) نزولی است ۰/۵ .

۱۷- نقاط بحرانی تابع $f(x) = \frac{x}{x^۲ + ۱}$ را در صورت وجود تعیین کنید.

« **پاسخ** »

$f'(x) = \frac{-x^۲ + ۱}{(x^۲ + ۱)^۲}$ ۰/۵ $\Rightarrow -x^۲ + ۱ = ۰ \Rightarrow x = \pm ۱$ ۰/۵ $\Rightarrow \{-۱,۱\}$ نقاط بحرانی ۰/۲۵

۱۸- در صورت وجود، مقدار ماکسیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x) = \sqrt{۹ - x^۲}$ را در دامنه‌ی آن تعیین کنید.

« **پاسخ** »

$D_f = [-۳,۳]$ ۰/۲۵

$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{۹ - x^۲}} = ۰$ ۰.۲۵ $\Rightarrow x = ۰ \Rightarrow$

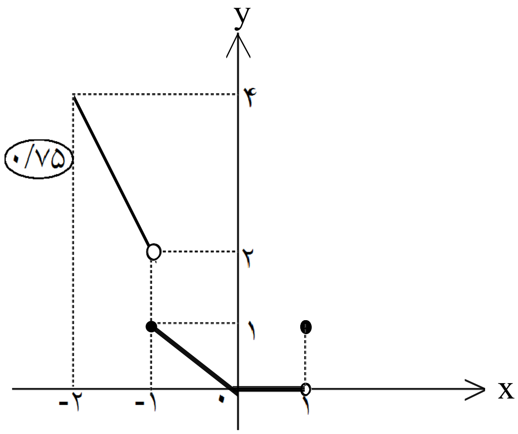
$f(-۳) = ۰$ ۰/۲۵ مینیمم مطلق ۰/۲۵

$f(۰) = ۳$ ۰/۲۵ ماکسیمم مطلق ۰/۲۵

$f(۳) = ۰$ ۰/۲۵ مینیمم مطلق ۰/۲۵

۱۹- نمودار $f\ (x) = x[x]$ را در بازه‌ی $[-۲ , ۱]$ رسم کنید، سپس با توجه به نمودار، نقاط ماکسیمم نسبی و می‌نیمم نسبی تابع f را تعیین کنید.

« **پاسخ** »



$f\ (x) = x[x]\ ,\ [-۲ , ۱]$

نقطه‌ی $(۰ , ۰)$، نقطه‌ی می‌نیمم نسبی تابع است. ۰/۲۵

و برای هر $۰ < x < ۱$ ، تابع هم دارای ماکسیمم نسبی و هم دارای می‌نیمم نسبی است. ۰/۵

۲۰- تابع $y = ax^۳ + bx + ۲$ مفروض است. ضرایب a و b را چنان بیابید که $A(۱,۰)$ نقطه‌ی مینیمم تابع باشد.

« **پاسخ** »

$A(۱,۰) \in$ منحنی $\Rightarrow ۰ = a + b + ۲ \longrightarrow a + b = -۲$ ۰/۲۵

$y' = ۳ax^۲ + b \Rightarrow ۰ = ۳a + b$ ۰/۲۵

$\begin{cases} a + b = -۲ \\ ۳a + b = ۰ \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} a = ۱ \\ b = -۳ \end{matrix}$ ۰/۵

۲۱- تابع $y = -x^۲ + bx + ۳$ مفروض است. b را چنان بیابید که تابع ماکزیممی برابر ۵ داشته باشد.

« **پاسخ** »

روش اول: $y = -x^۲ + bx + ۳$

$y_{Max} = ۵ \Rightarrow \frac{۴ac - b^۲}{۴a} = ۵$ ۰/۲۵ $\Rightarrow \frac{-۱۲ - b^۲}{-۴} = ۵ \Rightarrow b = \pm ۲\sqrt{۲}$ ۰/۵

روش دوم: $y' = -۲x + b = ۰ \Rightarrow x = \frac{b}{۲}$ ۰/۲۵

$۵ = -\frac{b^۲}{۴} + \frac{b^۲}{۲} + ۳ \Rightarrow ۲ = \frac{-b^۲ + ۲b^۲}{۴} \Rightarrow b^۲ = ۸ \Rightarrow b = \pm ۲\sqrt{۲}$ ۰/۵

۲۲- تابع $y = x^{۲} + bx + ۳$ مفروض است. b را چنان بیابید که تابع، می‌نیممی برابر ۲ داشته باشد.

« **پاسخ** »

روش اول:

$$y = x^{۲} + bx + ۳$$

$$y = \frac{۴ac - b^{۲}}{۴a} = \frac{۱۲ - b^{۲}}{۴} = ۲ \Rightarrow b = \pm ۲$$

روش دوم:

$$y' = ۲x + b = ۰ \Rightarrow x = -\frac{b}{۲}$$

$$\left(-\frac{b}{۲}, ۲\right) \Rightarrow ۲ = \left(-\frac{b}{۲}\right)^{۲} + b\left(-\frac{b}{۲}\right) + ۳ \Rightarrow b^{۲} = ۴ \Rightarrow b = \pm ۲$$

۲۳- تابع $y = x^{۲} + ۲ax + b$ مفروض است. a و b را چنان بیابید که $A(۲,۴)$ مینیمم تابع باشد.

« **پاسخ** »

$$y' = ۲x + ۲a \rightarrow ۰ = ۴ + ۲a \rightarrow a = -۲$$
$$۴ = ۴ + ۴a + b \rightarrow ۴a + b = ۰ \rightarrow -۸ + b = ۰ \rightarrow b = ۸$$

۲۴- تابع $y = ax^{۲} + ۴x + ۳$ داده شده است. ضریب a را چنان بیابید که نمودار تابع در نقطه‌ای به طول ۱- دارای ماکسیمم یا مینیمم باشد.

« **پاسخ** »

$$y' = ۲ax + ۴ \quad \Rightarrow \quad y'(-۱) = ۰ \rightarrow -۲a + ۴ = ۰ \rightarrow a = ۲$$

۲۵- مقدارهای a , b و c را طوری پیدا کنید که تابع $f(x) = x^{۳} + ax^{۲} + bx + c$ از نقطه‌ی $(۰ , ۱)$ بگذرد و در نقطه‌ی $(۱ , ۰)$ می‌نیمم نسبی داشته باشد.

« **پاسخ** »

$$(۰ , ۱) \in \text{تابع} \Rightarrow c = ۱ \Rightarrow f(x) = x^{۳} + ax^{۲} + bx + ۱$$
$$(۱ , ۰) \in \text{تابع} \Rightarrow a + b + ۲ = ۰ \Rightarrow a + b = -۲$$

$$f'(۱) = ۰ \Rightarrow ۳ + ۲a + b = ۰ \Rightarrow ۲a + b = -۳ \xrightarrow{\text{پس}} c = ۱ , b = -۱ , a = -۱$$

۲۶- بازه‌هایی را پیدا کنید که تابع $f(x) = |۲x - ۳| - |۳x - ۱|$ روی آنها اکیدا صعودی یا اکیدا نزولی است.

« **پاسخ** »

$$f'(x) = \frac{۲(۲x - ۳)}{|۲x - ۳|} - \frac{۳(۳x - ۱)}{|۳x - ۱|} = \begin{cases} ۱ & x < \frac{۱}{۳} \\ -۵ & \frac{۱}{۳} < x < \frac{۳}{۲} \\ -۱ & x > \frac{۳}{۲} \end{cases}$$

پس f در فاصله‌ی $\left(-\infty , \frac{۱}{۳}\right]$ اکیداً صعودی و در فاصله‌ی $\left[\frac{۱}{۳} , +\infty\right)$ اکیداً نزولی است.

۲۷- بازه‌هایی را پیدا کنید که تابع $f(x) = ۱ + |۳ - x|$ روی آنها اکیدا صعودی یا اکیدا نزولی است.

« **پاسخ** »

$$f'(x) = \frac{x - ۳}{|x - ۳|} = \begin{cases} ۱ & x > ۳ \\ -۱ & x < ۳ \end{cases}$$

f در فاصله‌ی $(-\infty , ۳]$ اکیداً نزولی و در فاصله‌ی $[۳ , +\infty)$ اکیداً صعودی است.

۲۸- بازه‌هایی را پیدا کنید که تابع $f(x) = ۳۶x - ۳x^{۲} + ۴\sqrt{x^{۳}}$ روی آنها اکیدا صعودی است.

« **پاسخ** »

$$D_f = [۰ , +\infty)$$

$$f'(x) = ۳۶ - ۶x + ۶\sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = ۶\left(-x + \sqrt{x} + ۶\right) = ۶\left(\sqrt{x} + ۲\right)\left(۳ - \sqrt{x}\right) \geqslant ۰$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} \leqslant ۳ \Rightarrow x \leqslant ۹$$

پس f در فاصله‌ی $[۰ , ۹]$ اکیداً صعودی است.

۲۹- بازه‌هایی را پیدا کنید که تابع $f(x) = x^{۳} - ۵x^{۲} + ۳x - ۱۱$ روی آنها اکیدا صعودی است.

« **پاسخ** »

$f'(x) = ۳x^{۲} - ۱۰x + ۳ \quad , \; f'(x) = ۰ \Rightarrow x = ۳ \, , \; x = \frac{۱}{۳}$

x		$\frac{۱}{۳}$		۳	
y'	+		-		+
y	↗		↘		↗

پس f در فاصله‌های $(-\infty , \frac{۱}{۳}]$ و $[۳ , +\infty)$ اکیداً صعودی است.

۳۰- نقاطی را پیدا کنید که تابع $f(x) = (x - ۱)^{۳}(x + ۱)^{۲}$ در آنها اکسترمم نسبی دارد.

« **پاسخ** »

$f'(x) = ۳(x - ۱)^{۲}(x + ۱)^{۲} + ۲(x + ۱)(x - ۱)^{۳} = (x - ۱)^{۲}(x + ۱)(۵x + ۱)$

$f'(x) = ۰ \Rightarrow x = ۱ \, , \; x = -۱ \, , \; x = -\frac{۱}{۵}$

x		-۱		$-\frac{۱}{۵}$		۱	
y'	+		-		+		+
y	↗		↘		↗		↗
		max		min			

پس تابع f در $x = -۱$ ماکزیمم نسبی و در $x = \frac{-۱}{۵}$ می‌نیمم نسبی دارد.

۳۱- نقاطی را پیدا کنید که تابع $f(x) = (x + ۳)^{۲}(x - ۴)^{۲}$ در آنها اکسترمم نسبی دارد.

« **پاسخ** »

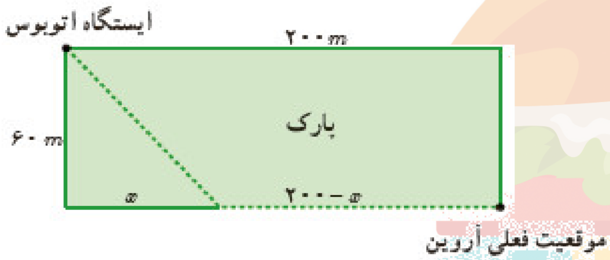
$$f'(x) = ۲(x + ۳)(x - ۴)^{۲} + ۲(x - ۴)(x + ۳)^{۲} \Rightarrow f'(x) = ۲(x + ۳)(x - ۴)(۲x - ۱)$$

$$f'(x) = ۰ \Rightarrow x = -۳ \,,\, x = ۴ \,,\, x = \frac{۱}{۲}$$

x		-۳		$\frac{۱}{۲}$		۴	
y'	-		+		-		+
y	↘	min	↗	max	↘	min	↗

پس این تابع در $x = -۳$ و $x = ۴$ می‌نیمم نسبی و در $x = \frac{۱}{۲}$ ماکزیمم نسبی دارد.

۳۲- آروین می‌خواهد به ایستگاه اتوبوسی برود که در ۲۰۰ متری غرب و ۶۰ متری شمال موقعیت فعلی او و بعد از پارک قرار دارد. او می‌تواند با سرعت ۳ متر بر ثانیه از پیاده‌رو کنار پارک به سمت غرب برود. همچنین، می‌تواند از درون پارک و تنها با سرعت $۲\frac{m}{s}$ عبور کند. با توجه به شکل، مقدار x را طوری تعیین کنید که او در کم‌ترین زمان ممکن به ایستگاه برسد.



« **پاسخ** »

$$t_{۱} = \frac{۲۰۰ - x}{۳} \qquad t_{۲} = \frac{\sqrt{۳۶۰۰ + x^{۲}}}{۲}$$

$$t = t_{۱} + t_{۲} = \frac{۲۰۰ - x}{۳} + \frac{\sqrt{۳۶۰۰ + x^{۲}}}{۲} = \frac{۱}{۶}\left(۴۰۰ - ۲x + ۳\sqrt{۳۶۰۰ + x^{۲}}\right)$$

$$t' = \frac{۱}{۶}\left(-۲ + ۳ \times \frac{\cancel{۲}x}{\cancel{۲}\sqrt{۳۶۰۰ + x^{۲}}}\right) \xrightarrow{t' = ۰} ۲ = \frac{۳x}{\sqrt{۳۶۰۰ + x^{۲}}} \Rightarrow ۲\sqrt{۳۶۰۰ + x^{۲}} = ۳x$$

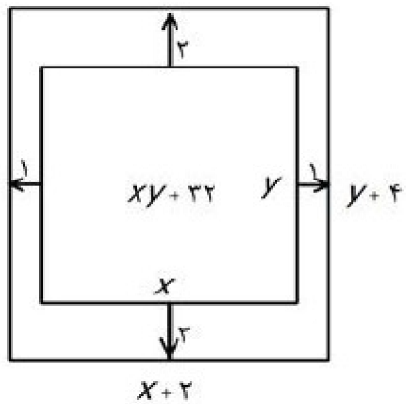
$$\xrightarrow{\text{به توان ۲ می رسانیم}} ۴(۳۶۰۰ + x^{۲}) = ۹x^{۲} \Rightarrow ۵x^{۲} = ۴ \times ۳۶۰۰ \Rightarrow x^{۲} = ۲۸۸۰$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{۲۸۸۰} = ۲۴\sqrt{۵}$$

$$t = \frac{۱}{۶}\left(۴۰۰ - ۲ \times ۲۴\sqrt{۵} + ۳\sqrt{۳۶۰۰ + ۲۸۸۰}\right) = ۱۰۰$$

۳۳- هر صفحه‌ی مستطیل شکل از یک کتاب جیبی، شامل یک متن با مساحت ثابت $۳۲cm^۲$ خواهد بود. هنگام طراحی قطع این کتاب، لازم است حاشیه‌های بالا و پایینی هر صفحه ۲cm و حاشیه‌های کناری هر کدام یک سانتی‌متر درنظر گرفته شوند. ابعاد صفحه را طوری تعیین کنید که مساحت هر صفحه از کتاب کم‌ترین مقدار ممکن باشد.

« **پاسخ** »



$$S_{(x)} = (x+۲)(y+۴) = xy + ۴x + ۲y + ۸$$

$$\xrightarrow{xy = ۳۲} S_{(x)} = ۴x + ۲y + ۴۰ \xrightarrow{y = \frac{۳۲}{x}}$$

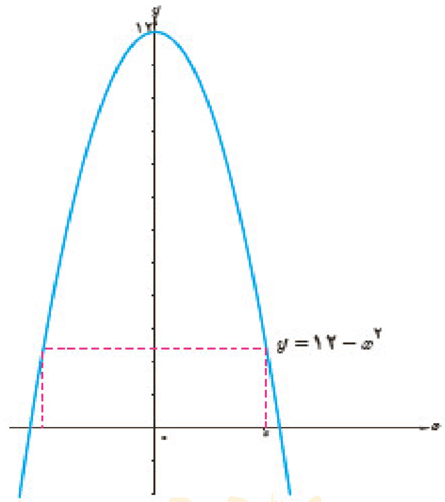
$$S_{(x)} = ۴x + \frac{۶۴}{x} + ۴۰$$

$$S'_{(x)} = ۴ - \frac{۶۴}{x^۲} = \frac{۴x^۲ - ۶۴}{x^۲} \xrightarrow{S'_{(x)} = ۰} ۴x^۲ - ۶۴ = ۰ \Rightarrow x^۲ = ۱۶ \Rightarrow x = ۴$$

$$\xrightarrow{y = \frac{۳۲}{x}} y = \frac{۳۲}{۴} = ۸$$

ابعاد جعبه برابر است با: $(۶ = ۲ + ۴)$ و $(۱۲ = ۴ + ۸)$

۳۴- ابعاد مستطیلی با بیش‌ترین مساحت را تعیین کنید که دو رأس آن روی محور x ها و دو رأس دیگرش بالای محور x ها و روی سهمی $y = ۱۲ - x^۲$ باشند.



« **پاسخ** »

$$S_{(x)} = ۲xy = ۲x\left(۱۲ - x^۲\right) = ۲۴x - ۲x^۳$$

$$S'_{(x)} = ۲۴ - ۶x^۲ \xrightarrow{S'_{(x)} = ۰} ۲۴ - ۶x^۲ = ۰ \Rightarrow x^۲ = ۴ \Rightarrow x = ۲ \xrightarrow{y = ۱۲ - x^۲}$$
$$y = ۱۲ - ۴ = ۸$$

طول مستطیل برابر با ۸ و عرض آن برابر با ۴ است.

۳۵- اگر محیط یک مستطیل ۲۴ سانتی‌متر باشد، طول و عرض مستطیل را طوری حساب کنید که مساحت آن ماکزیمم شود.

« **پاسخ** »

$$۲x + ۲y = ۲۴ \Rightarrow x + y = ۱۲ \Rightarrow y = ۱۲ - x \quad (۰/۲۵)$$

$$S(x) = xy = x(۱۲ - x) = ۱۲x - x^۲ \quad (۰/۲۵)$$
$$S'(x) = ۱۲ - ۲x = ۰ \Rightarrow x = ۶ \; (۰/۲۵) \,,\; y = ۶ \; (۰/۲۵)$$

۳۶- مجموع دو عدد مثبت برابر ۱۶ است. بزرگ‌ترین مقدار ممکن برای حاصل ضرب آن‌ها را پیدا کنید.

« **پاسخ** »

$$x + y = ۱۶ \Rightarrow y = ۱۶ - x \quad ۰/۲۵$$

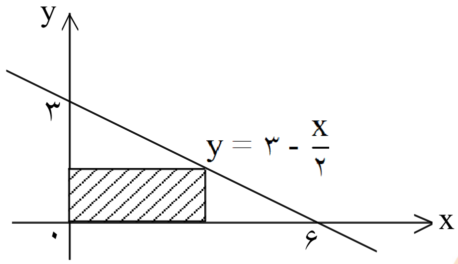
$$p = xy \Rightarrow p(x) = x(۱۶ - x) = ۱۶x - x^۲ \quad ۰/۲۵$$
$$p'(x) = ۱۶ - ۲x \;\; ۰/۲۵ \Rightarrow ۱۶ - ۲x = ۰ \Rightarrow x = ۸ \;\; ۰/۲۵ \,,\; y = ۸ \;\; ۰/۲۵ \Rightarrow p_{max} = ۶۴ \;\; ۰/۲۵$$

۳۷- اگر $۲x + y = ۶۰$ باشد، مقادیر x , y را چنان بیابید که حاصل‌ضرب آن‌ها ماکزیمم گردد.

« **پاسخ** »

$$۲x + y = ۶۰ \Rightarrow y = ۶۰ - ۲x \Rightarrow xy = x(۶۰ - ۲x) = ۶۰x - ۲x^۲$$
$$\Rightarrow x = \frac{-b}{۲a} = \frac{۶۰}{۴} = ۱۵ \Rightarrow y = ۶۰ - ۳۰ = ۳۰$$

۳۸- در شکل زیر، یک مستطیل به محور x ها و y ها ونمودار تابع $y = ۳ - \frac{x}{۲}$ محدود شده است. طول و عرض مستطیل چقدر باشد تا مساحت آن ماکزیمم شود؟



« **پاسخ** »

$$S = x\left(۳ - \frac{x}{۲}\right) = ۳x - \frac{x^۲}{۲}$$

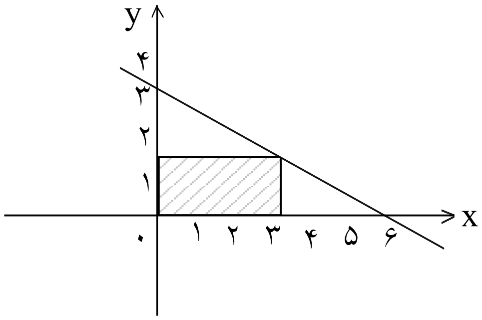
$$S' = ۳ - x = ۰ \Rightarrow x = ۳ \Rightarrow \text{ابعاد مستطیل} \begin{cases} x = ۳ & \text{طول} \\ y = ۳ - \frac{x}{۲} = \frac{۳}{۲} & \text{عرض} \end{cases}$$

۳۹- طول و عرض مستطیلی را بدست آورید که محیط آن ۲۰۰ متر بوده و مساحت آن ماکزیمم باشد.

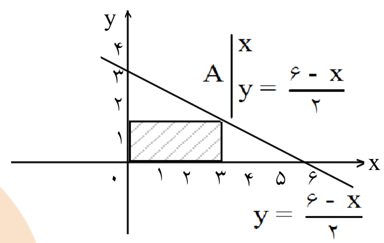
« **پاسخ** »

$$\left.\begin{array}{l} x + y = ۱۰۰ \\ y = ۱۰۰ - x \end{array}\right\} \Rightarrow S = x \cdot y \Rightarrow S = x(۱۰۰ - x) \Rightarrow S = ۱۰۰x - x^۲ \Rightarrow S' = ۱۰۰ - ۲x = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۵۰ \\ y = ۵۰ \end{cases}$$

۴۰- یک مستطیل مطابق شکل به محورهای xها و yها و نمودار تابع با ضابطه‌ی $y = \frac{۶ - x}{۲}$ (شکل زیر) محدود شده است. طول و عرض مستطیل چقدر باشد تا مساحت آن ماکزیمم شود؟



« **پاسخ** »



$$S = x \cdot y \xrightarrow{y = \frac{۶ - x}{۲}} S = x\left(\frac{۶ - x}{۲}\right)$$ مساحت مستطیل

$$\rightarrow S(x) = ۳x - \frac{۱}{۲}x^{۲}$$ تابع مساحت مستطیل

$$\rightarrow S'(x) = ۳ - x \xrightarrow{S'(x) = ۰} ۳ - x = ۰ \rightarrow x = ۳$$ طول مستطیل

$$\rightarrow y = \frac{۶ - ۳}{۳} = \frac{۳}{۲}$$ عرض مستطیل

۴۱- دو عدد مثبت چنان بیابید که مجموع برابر ۶ و حاصل ضرب آن‌ها ماکزیمم باشد.

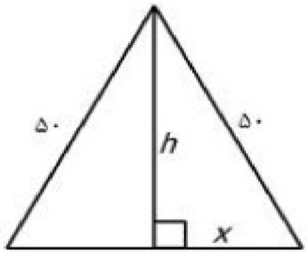
« **پاسخ** »

$$x + y = ۶$$

$$P = xy = x(۶ - x) = -x^{۲} + ۶x \rightarrow P' = -۲x + ۶ = ۰ \rightarrow x = ۳ ,\ y = ۳$$

۴۲- الف) می‌خواهیم کنار رودخانه یک محوطه به شکل مثلث متساوی‌الساقین را نرده‌کشی کنیم به طوری‌که قاعده‌ی مثلث منطبق بر رودخانه باشد. اگر تنها هزینه ۱۰۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم، در این صورت بیش‌ترین مساحت ممکن برابر این مثلث چه‌قدر خواهد بود؟
ب) بدون استفاده از مشتق نیز، این مسئله را حل کنید.

« **پاسخ** »



الف) $h^{۲} + x^{۲} = ۵۰^{۲} \Rightarrow h = \sqrt{۲۵۰۰ - x^{۲}}$

$$S_{(x)} = \frac{۱}{۲} \times ۲x \times h = x\left(\sqrt{۲۵۰۰ - x^{۲}}\right) \qquad D = [۰ , ۵۰]$$

$$S'_{(x)} = \sqrt{۲۵۰۰ - x^{۲}} + x \times \frac{-۲x}{۲\sqrt{۲۵۰۰ - x^{۲}}} = \frac{۲۵۰۰ - x^{۲} - x^{۲}}{\sqrt{۲۵۰۰ - x^{۲}}} = \frac{۲۵۰۰ - ۲x^{۲}}{\sqrt{۲۵۰۰ - x^{۲}}}$$

$$\xrightarrow{S'_{(x)} = ۰} ۲۵۰۰ - ۲x^{۲} = ۰ \Rightarrow x^{۲} = \frac{۲۵۰۰}{۲} = ۱۲۵۰ \Rightarrow x = \sqrt{۱۲۵۰} = ۲۵\sqrt{۲}$$

$$\xrightarrow{h = \sqrt{۲۵۰۰ - x^{۲}}} h = \sqrt{۲۵۰۰ - ۱۲۵۰} = \sqrt{۱۲۵۰} \Rightarrow h = ۲۵\sqrt{۲}$$

$$S_{(x)} = \left(۲۵\sqrt{۲}\right)\left(\sqrt{۲۵۰۰ - ۱۲۵۰}\right) = ۶۲۵ \times ۲ = ۱۲۵۰$$

ب) با توجه به $S = \frac{۱}{۲} \times ۵۰ \times ۵۰ \times \sin\theta$ بیش‌ترین مساحت وقتی است که $\sin\theta = ۱$ باشد پس $\theta = ۹۰^{\circ}$ می‌شود پس خواهیم داشت:

$$S = \frac{۱}{۲} \times ۵۰ \times ۵۰ \times \sin\theta = \frac{۱}{۲} \times ۵۰ \times ۵۰ \times ۱ = ۱۲۵۰$$