

گروه آموزشی کلاسیویچ

Classwich.ir



نمونه سوالات تستی

از مبحث مثلثات

به همراه پاسخ کلیدی و تشریحی

فصل دوم ریاضی دوازدهم

تهیه کننده : عرفان خیامی





۱- اگر $\tan \frac{x}{2} = \sqrt{2}$ باشد حاصل $\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$ کدام است؟

- ۱ $2\sqrt{2}$
 ۲ $\sqrt{2}$
 ۳ ۲
 ۴ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۲- حاصل $\frac{1}{\sin x} - \cot x$ برابر کدام می باشد؟

- ۱ $\cot \frac{x}{2}$
 ۲ $\tan \frac{x}{2}$
 ۳ $-\tan \frac{x}{2}$
 ۴ $-\cot \frac{x}{2}$

۳- در یک متوازی‌الاضلاع به مساحت $12\sqrt{2}$ ، طول اضلاع برابر ۶ و ۴ است. اندازه‌ی یک زاویه‌ی این متوازی‌الاضلاع کدام است؟

- ۱ 30°
 ۲ 90°
 ۳ 120°
 ۴ 135°

۴- حاصل $\cot^2 15^\circ - \tan^2 15^\circ$ کدام است؟

- ۱ $\frac{8\sqrt{3}}{3}$
 ۲ $\frac{4\sqrt{3}}{3}$
 ۳ $8\sqrt{3}$
 ۴ $4\sqrt{3}$

۵- جواب کلی معادله‌ی $2\sin^2 x = 1 - \cos 4x$ کدام است؟

- ۱ $x = \frac{k\pi}{3}$
 ۲ $x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$
 ۳ $x = \frac{k\pi}{6}$
 ۴ $x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

۶- زاویه‌ی θ کمانی به طول $\frac{1}{2}$ سانتی متر در دایره‌ای با شعاع $\frac{1}{4}$ سانتی متر بریده است. مقدار θ بر حسب رادیان کدام است؟

- ۱ صفر
 ۲ ۱
 ۳ ۲
 ۴ ۳

۷- حاصل $\frac{\sin 20^\circ}{1 + \cos 20^\circ}$ کدام است؟

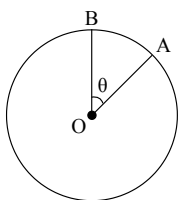
- ۱ $\sin 10^\circ$
 ۲ $\cos 10^\circ$
 ۳ $\tan 10^\circ$
 ۴ $\tan 40^\circ$

۸- جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی $\cos 2x + 2\cos^2 x = 0$ ، کدام است؟

- ۱ $x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$
 ۲ $x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$
 ۳ $x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$
 ۴ $x = k\pi \pm \frac{\pi}{6}$

۹- مطابق شکل زیر، در دایره‌ای به مرکز O و به شعاع ۵، طول کمان AB برابر $\frac{\pi}{2}$ است. اندازه‌ی زاویه‌ی θ بر حسب درجه کدام است؟

- ۱ 10°
 ۲ 20°
 ۳ 18°
 ۴ 36°



۱۰- اگر $\cos^2 x = 1 + \sin^2 x$ ، آنگاه حاصل $\cos x$ کدام می‌تواند باشد؟

- ۱ صفر
 ۲ -۱
 ۳ $\frac{1}{2}$
 ۴ $-\frac{1}{2}$

۱۱- اگر θ زاویه‌ای حاده باشد، حاصل عبارت مقابل کدام است؟

- ۱ $-1 - 2\sin \theta$
 ۲ 5
 ۳ $1 + 2\sin \theta$
 ۴ $2\sin \theta - 1$
- $A = \sqrt{4 - 4\sin \theta + \sin^2 \theta} + \sqrt{9 + 6\sin \theta + \sin^2 \theta}$

۱۲- نمودار تابع های $f(x) = 3 \sin 2x - 2$ و $g(x) = k$ در بازه $(0, T)$ همدیگر را در دو نقطه قطع می کنند. حدود k کدام است؟
(T دوره تناوب تابع f است.)

- (۱) $(-5, 1)$ (۲) $(-5, -2) \cup (-2, 1)$ (۳) $(-2, 1) \cup (1, 5)$ (۴) $(-7, -5) \cup (-5, -2)$

۱۳- نقطه A روی محیط بیرونی چرخ کامیونی که با سرعت ثابت $\frac{km}{h}$ 60 در حال حرکت است، قرار دارد. این نقطه پس از گذشت 1 دقیقه n دور به علاوه $\frac{2}{3}$ دور کامل را طی می کند. n کدام است؟ (شعاع چرخ 1 متر است و $\pi \approx 3$)

- (۱) 167 (۲) 133 (۳) 190 (۴) 166

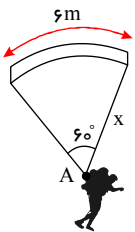
۱۴- معادله $\sin^2 x = \sin x$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

- (۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) 4

۱۵- در یک ساعت عقربه‌ای، نوک عقربه دقیقه‌شمار در مدت زمان 40 دقیقه، مسافت 60 سانتی‌متر را طی کرده است. طول عقربه دقیقه‌شمار چند سانتی‌متر است؟

- (۱) $\frac{15}{\pi}$ (۲) 15π (۳) $\frac{45}{\pi}$ (۴) 45π

۱۶- مطابق شکل، یک چتر نجات به حالت دایره‌ای در هنگام پرواز به اندازه 60° درجه باز شده است. مقدار x چند متر است؟ (نقطه A را مرکز دایره فرض کنید.)



- (۱) $\frac{\pi}{10}$ (۲) 18π

- (۳) 10π (۴) $\frac{18}{\pi}$

۱۷- در یک مثلث قائم‌الزاویه، اختلاف دو زاویه حاده برابر با 18° است. کوچک‌ترین زاویه مثلث چند رادیان است؟

- (۱) $\frac{\pi}{10}$ (۲) $\frac{\pi}{5}$ (۳) $\frac{3\pi}{10}$ (۴) $\frac{2\pi}{5}$

۱۸- اگر $\sin x = \frac{\sqrt{6}}{4}$ باشد، مقدار $\cos 4x$ کدام است؟

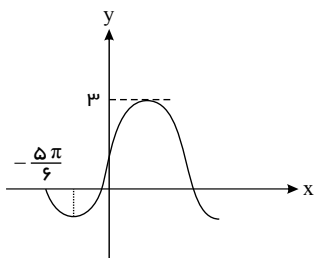
- (۱) $-\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{3}{4}$ (۳) $-\frac{7}{8}$ (۴) $\frac{7}{8}$

۱۹- اگر $\tan \alpha = \frac{4}{3}$ و انتهای کمان α در ربع سوم باشد، حاصل عبارت زیر کدام است؟

$$\sin\left(\frac{9\pi}{2} + \alpha\right) \cos\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) - \tan\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$$

- (۱) $-1, 23$ (۲) $-0, 52$ (۳) $0, 27$ (۴) $0, 48$

۲۰- شکل روبه‌رو، قسمتی از نمودار تابع $y = a + b \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ است. مقدار تابع در $x = \frac{\pi}{6}$ کدام است؟



- (۱) $1, 5$ (۲) 2 (۳) $2, 5$ (۴) $1 + \sqrt{3}$

پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۳

$$\boxed{1 - \cos u = 2 \sin^2 \frac{u}{2}, \quad 1 + \cos u = 2 \cos^2 \frac{u}{2}} \quad \text{می‌دانیم:}$$

$$\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \tan^2 \frac{x}{2} = (\sqrt{2})^2 = 2$$

۲ - گزینه ۲

$$\boxed{\sin u = 2 \sin \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2}, \quad 1 - \cos u = 2 \sin^2 \frac{u}{2}} \quad \text{می‌دانیم:}$$

$$\frac{1}{\sin x} - \cot x = \frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin x} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \tan \frac{x}{2}$$

۳ - گزینه ۴ مساحت متوازی الاضلاعی که طول اضلاع آن a و b و زاویهی بین اضلاع آن θ است برابر است با: $S = ab \sin \theta$ چون مساحت برابر $12\sqrt{2}$ و طول اضلاع برابر ۶ و ۴ است، بنابراین:

$$12\sqrt{2} = 6 \times 4 \times \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = 45^\circ \text{ یا } 135^\circ$$

که با توجه به گزینه‌ها، گزینه‌ی «۴» صحیح است.

۴ - گزینه ۳ اول از اتحاد مزدوج و سپس از روابط $\tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x}$ و $\cot x - \tan x = 2 \cot 2x$ استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \cot^2 15^\circ - \tan^2 15^\circ &= (\cot 15^\circ - \tan 15^\circ)(\cot 15^\circ + \tan 15^\circ) = 2 \cot 2(15^\circ) \times \frac{2}{\sin 2(15^\circ)} \\ &= 2 \cot 30^\circ \times \frac{2}{\sin 30^\circ} = 2\sqrt{3} \times \frac{2}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{3} \times 4 = 8\sqrt{3} \end{aligned}$$

۵ - گزینه ۱

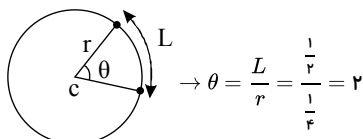
$$\boxed{1 - 2 \sin^2 x = \cos 2x} \quad \text{می‌دانیم:}$$

$$2 \sin^2 x = 1 - \cos 2x \Rightarrow \cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\rightarrow \cos 2x = \cos 2x \xrightarrow{x=2k\pi \pm \alpha} 2x = 2k\pi \pm 2x \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + 2x \Rightarrow x = k\pi \\ 2x = 2k\pi - 2x \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \end{cases}$$

جواب‌های $x = \frac{k\pi}{2}$ را نیز شامل می‌شود پس جواب کلی معادله به صورت $x = \frac{k\pi}{2}$ است.

۶ - گزینه ۳



$$\boxed{\sin 2a = 2 \sin a \cos a} \quad \text{می‌دانیم:}$$

$$\boxed{1 + \cos 2a = 2 \cos^2 a}$$

$$\frac{\sin 2^\circ}{1 + \cos 2^\circ} = \frac{2 \sin 1^\circ \cos 1^\circ}{2 \cos^2 1^\circ} = \frac{\sin 1^\circ}{\cos 1^\circ} = \tan 1^\circ$$

$$\boxed{1 + \cos 2a = 2 \cos^2 a} \quad \text{می‌دانیم:}$$

$$\cos 2x + 2 \cos^2 x = 0 \rightarrow \cos 2x + 1 + \cos 2x = 0 \rightarrow 2 \cos 2x = -1 \rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \cos 2x = \cos(\pi - \frac{\pi}{3}) = \cos \frac{2\pi}{3} \xrightarrow{x=2k\pi \pm \alpha} 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} \rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

۹ - گزینه ۳ اگر θ بر حسب رادیان و r شعاع دایره و L اندازه‌ی کمان روبه‌رو به زاویه‌ی θ باشد داریم:

$$\theta = \frac{L}{r} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{10} \text{ رادیان}$$

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \rightarrow \frac{D}{180} = \frac{\pi}{10} \rightarrow \frac{D}{180} = \frac{1}{10} \rightarrow D = 18^\circ$$

۱۰ - گزینه ۲ می‌دانیم: $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1$

$$\cos^2 x = 1 + \sin^2 x \rightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = 1 \rightarrow (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = 1 \rightarrow \cos 2x = 1$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \rightarrow 1 = 2\cos^2 x - 1 \rightarrow 2\cos^2 x = 2 \rightarrow \cos^2 x = 1 \rightarrow \cos x = \pm 1$$

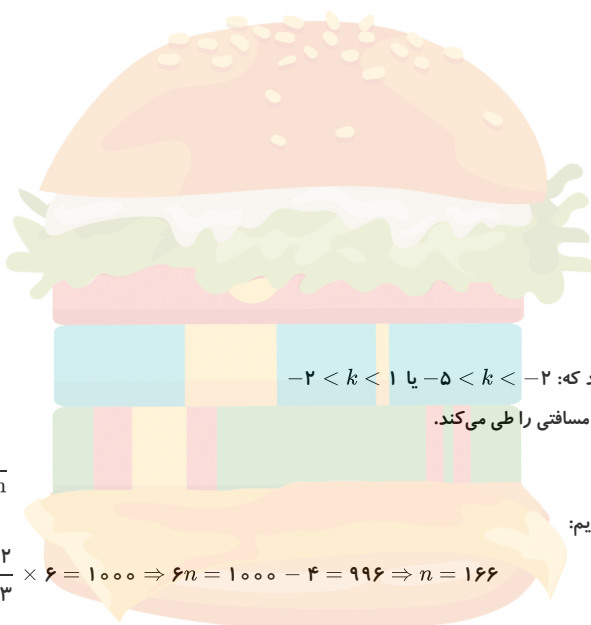
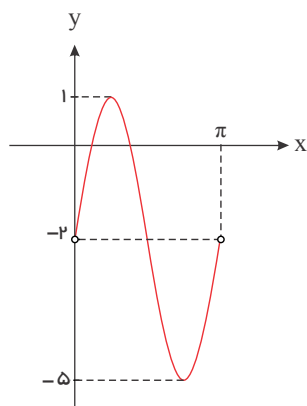
۱۱ - گزینه ۲ ابتدا عبارات زیر رادیکال‌ها را ساده می‌کنیم:

$$A = \sqrt{(\sin \theta - 2)^2} + \sqrt{(\sin \theta + 3)^2} = \underbrace{|\sin \theta - 2|}_{-} + \underbrace{|\sin \theta + 3|}_{+} = -\sin \theta + 2 + \sin \theta + 3 = 5$$

۱۲ - گزینه ۲

$$f(x) = 3 \sin 2x - 2 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

برای رسم نمودار تابع f کافی است که در تابع $y = \sin x$ طول‌ها را نصف کرده و سپس عرض‌ها را سه برابر کرده و شکل را دو واحد پایین آوریم که شکل روبرو به دست می‌آید.



تابع $g(x) = k$ زمانی نمودار f را در دو نقطه قطع می‌کند که: $-2 < k < 1$ یا $-5 < k < -2$.

۱۳ - گزینه ۴ ابتدا باید ببینیم در یک دقیقه، کامیون چه مسافتی را طی می‌کند.

$$60 \frac{km}{h} \times \frac{1h}{60 \text{ min}} \times \frac{1000m}{1km} = 1000 \frac{m}{min}$$

کامیون در یک دقیقه، ۱۰۰۰ متر حرکت می‌کند، پس داریم:

$$2\pi r = 2 \times 3 \times 1 = 6 \Rightarrow 6n + \frac{2}{3} \times 6 = 1000 \Rightarrow 6n = 1000 - 4 = 996 \Rightarrow n = 166$$

۱۴ - گزینه ۴

$$\sin^2 x = \sin x \rightarrow \sin x(\sin x - 1) = 0 \rightarrow \begin{cases} \text{حالت خاص} \\ \sin x = 0 \rightarrow x = k\pi \rightarrow x = 0, \pi, 2\pi \\ \text{حالت خاص} \\ \sin x = 1 \rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

بنابراین این معادله در بازه $[0, 2\pi]$ دارای ۴ ریشه است.

۱۵ - گزینه ۳ یک دور کامل در دایره، ۶۰ دقیقه است. بنابراین عقربه دقیقه‌شمار $\frac{2}{3}$ دایره را طی کرده است. دایره کامل 2π رادیان است. بنابراین داریم:

$$\text{زاویه دوران عقربه بر حسب رادیان} = \frac{2}{3} \times 2\pi = \frac{4\pi}{3} \text{ rad}$$

$$\Rightarrow r = \frac{l(\text{طول کمان})}{\theta(\text{بر حسب رادیان})}$$

$$= \frac{60}{\frac{4\pi}{3}} = \frac{45}{\pi} \text{ (سانتی‌متر)}$$

۱۶ - گزینه ۴

$$\theta = \frac{l}{r} \rightarrow \frac{\pi}{3} = \frac{6}{x} \rightarrow x = \frac{18}{\pi}$$

۱۷ - گزینه ۲

$$\left. \begin{aligned} x - y &= 18^\circ \\ x + y &= 90^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2x = 108^\circ \Rightarrow x = 54^\circ, y = 90^\circ - 54^\circ \Rightarrow y = 36^\circ$$

$$\frac{36}{180} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{36\pi}{180} = \frac{\pi}{5}$$

۱۸ - گزینه ۳

می‌دانیم $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$ است.

$$\sin x = \frac{\sqrt{6}}{4} \Rightarrow \cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x = 1 - 2 \times \frac{6}{16} = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\cos 4x = \cos 2(2x) = 2 \cos^2 2x - 1 = 2 \times \frac{1}{16} - 1 = \frac{1}{8} - 1 = -\frac{7}{8}$$

۱۹ - گزینه ۳

$$\tan \alpha = \frac{4}{3} \rightarrow \begin{cases} 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \rightarrow 1 + \frac{16}{9} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{9}{25} \xrightarrow{\text{ناحیه سوم}} \cos \alpha = -\frac{3}{5} \\ \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \rightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \xrightarrow{\text{ناحیه سوم}} \sin \alpha = -\frac{4}{5} \\ \cot \alpha = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\sin\left(\frac{9\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(4\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha = -\frac{3}{5}$$

$$\cos\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\left(3\pi + \frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\tan\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = -\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cot \alpha = -\frac{3}{4}$$

$$\text{پس: } \sin\left(\frac{9\pi}{2} + \alpha\right) \cos\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) - \tan\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = \left(-\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right) + \frac{3}{4} = -\frac{12}{25} + \frac{3}{4} = \frac{-48 + 75}{100} = \frac{27}{100} = 0,27$$

۲۰ - گزینه ۲

$$y = a + b \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = a + b \sin x$$

$$\left| \frac{-5\pi}{6} \right. \begin{matrix} \text{صندوق} \\ \rightarrow \circ = a + b \sin\left(\frac{-5\pi}{6}\right) \rightarrow \circ = a - b \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \\ \left. \circ \right.$$

$$\rightarrow \circ = a - b \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \rightarrow \circ = a - b \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \rightarrow a - \frac{b}{2} = \circ \quad (I)$$

در تابع $y = a \sin bx + c$ مقدار Max تابع از رابطه $|a| + c$ به دست می‌آید و چون تابع داده شده فرمت سینوس را دارد $ab > 0$ است و چون $y(\circ) > 0$ است و در نتیجه $b > 0$ است.

$$Max = |a| + c \rightarrow 3 = |b| + a \rightarrow 3 = b + a \quad (II)$$

از روابط (I) و (II) مقادیر $a = 1$ و $b = 2$ حاصل می‌شوند.

$$\text{پس: } f(x) = 1 + 2 \sin x \rightarrow f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 + 2\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۳

۴ - ۳

۷ - ۳

۱۰ - ۲

۱۳ - ۴

۱۶ - ۴

۱۹ - ۳

۲ - ۲

۵ - ۱

۸ - ۳

۱۱ - ۲

۱۴ - ۴

۱۷ - ۲

۲۰ - ۲

۳ - ۴

۶ - ۳

۹ - ۳

۱۲ - ۲

۱۵ - ۳

۱۸ - ۳

