گروه آموزشی کلاسویچ

Classwich.ir

نمونه سوالات تستی

از مبحث تابع

به همراه پاسخ کلیدی و تشریحی

فصل اول ریاضی دوازدهم

تهیه کننده : عرفان خیامی

نام و نام خانوادگی:

۱ اگر $f(x)=\dfrac{۲x+۱}{\sqrt{x+۴}}$ و $g(x)=\dfrac{x^۲-۲۵}{\sqrt{x+۴}}$ باشند، دامنهٔ تابع $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ کدام است؟ آسان- قلم چی- ۱۳۹۸

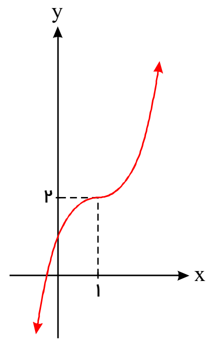
۱) $(-۴,+\infty)-\{۵\}$ ۲) $\mathbb{R}-\{-۵,۵\}$ ۳) $(-۴,+\infty)$ ۴) $(-۴,+\infty)-\{-\frac{۱}{۲}\}$

۲ تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x+۲|+|x-۱|$، در کدام بازه، اکیداً نزولی است؟ آسان- سراسری- ۱۳۹۸

۱) $(-\infty,-۲)$ ۲) $(-\infty,۱)$ ۳) $(-۲,۱)$ ۴) $(۱,+\infty)$

۳ نمودار تابع با ضابطهٔ $y=(x-a)^۳+b$ به‌صورت زیر است. حاصل $a\cdot b$ کدام است؟ آسان- قلم چی- ۱۳۹۸

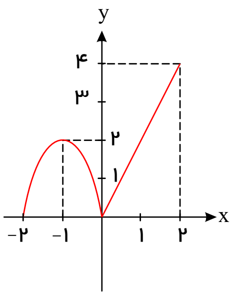
۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۳ ۴) -۳

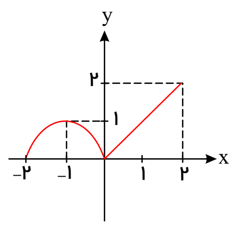


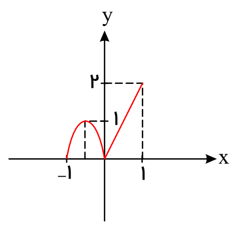
۴ اگر $f(x)=x^۲-\sqrt{۳x}$ و $g=\{(-۲,۰),(۰,۳),(۱,-۱),(۳,-۲)\}$ باشند، آنگاه حاصل $(fog^{-۱})(-۲)$ کدام است؟ آسان- قلم چی- ۱۳۹۸

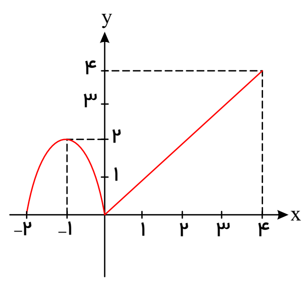
۱) صفر ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) تعریف نشده

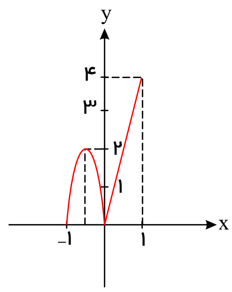
۵ نمودار تابع $y=f(x)$ به‌صورت مقابل است. نمودار تابع $y=\frac{۱}{۲}f(۲x)$ کدام است؟ آسان- منتا- ۱۳۹۸



۱)


۲)


۳)


۴)


۶ اگر تابع $f(x)=mx+۴-۳x$ هم صعودی و هم نزولی باشد، m کدام است؟ آسان- منتا- ۱۳۹۸

۱) $m>۳$ ۲) $m<۳$ ۳) $m=۰$ ۴) $m=۳$

۷ دامنهٔ تعریف تابع $f(x)=\sqrt[۷]{x^۵-۴x^۳+۷x+۸\sqrt[۴]{x-۴}}$ شامل چند عدد طبیعی نمی‌باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۸ اگر $f^{-۱}(x)=\sqrt{x+۷}$ و $g=\{(۲,۱),(-۱,۰),(۱,۳),(۰,۶)\}$، آن‌گاه حاصل $f^{-۱}(۲g^{-۱}(۳))$ کدام است؟ آسان- قلم چی- ۱۳۹۹

۱) $۲\sqrt{۲}$ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۹ اگر $f(x)=\{(-۱,۱),(۰,۲),(۱,۴)\}$ و $g(x)=\{(۱,۲),(۲,۳),(-۱,۰)\}$ باشد؛ حاصل $(f^{-۱}og)(۱)$ کدام است؟ آسان- قلم چی- ۱۳۹۹

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

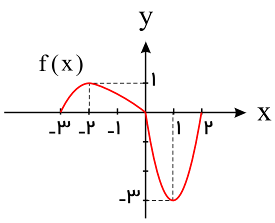
۱۰ تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x+۱|-|x-۲|$، در کدام بازه، اکیداً صعودی است؟ آسان- خارج از کشور- ۱۳۹۸

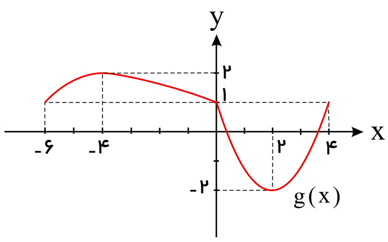
۱) $(-\infty,۲)$ ۲) $(-۱,+\infty)$ ۳) $(-۱,۲)$ ۴) $(۲,+\infty)$

۱۱ اگر $f(x)=\frac{۲}{۵}x-۴$ و $g(x)=x^۳+x$ باشند، مقدار $(g^{-۱}of^{-۱})(۸)$، کدام است؟ متوسط- خارج از کشور- ۱۳۹۸

۱) ۱/۵ ۲) ۲ ۳) ۲/۵ ۴) ۳

۱۲ با توجه به نمودار دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ کدام رابطه صحیح است؟ متوسط- قلم چی- ۱۳۹۸





۱) $g(x)=f\left(\frac{x+۲}{۲}\right)$

۲) $g(x)=f(۲x)+۱$

۳) $g(x)=f\left(\frac{x}{۲}\right)+۱$

۴) $g(x)=f(x+۲)+۲$

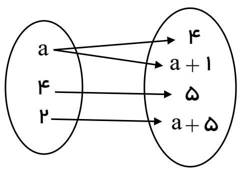
۱۳ اگر دامنهٔ تعریف تابع $y=f(۲-x)$ بازهٔ $[-۱,۲]$ باشد، دامنهٔ تعریف تابع $g(x)=f(۳x+۴)$ کدام است؟ متوسط- قلم چی- ۱۳۹۸

۱) $\left[-\frac{۴}{۳},-\frac{۱}{۳}\right]$ ۲) $[۰,۱]$ ۳) $[۰,۳]$ ۴) $[۱,۲]$

۱۴ نمودار تابع $y=-x^۲+۲x+۵$ را ۳ واحد به طرف x های مثبت، سپس ۲ واحد به طرف y های منفی انتقال می‌دهیم. نمودار جدید در کدام بازه، بالای نیمساز ربع اول است؟ متوسط- سراسری- ۱۳۹۸

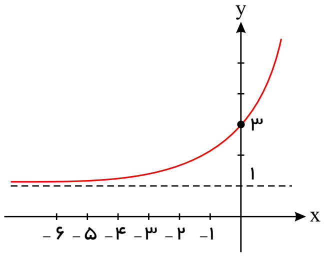
۱) $(۳,۴)$ ۲) $(۲,۵)$ ۳) $(۳,۵)$ ۴) $(۲,۶)$

۱۵ نمودار ون تابع f به‌صورت زیر و تابع g به‌صورت $g=\{(x,۲x-۱)|x\in R_f\}$ است، مقدار $f+g$ کدام است؟ متوسط- قلم چی- ۱۳۹۸



۱) ۷ ۲) ۹ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۱۶ شکل مقابل، مربوط به نمودار وارون تابع $f(x)=\log_{۲}^{(x+a)}+b$ است. $a+b$ کدام است؟ متوسط - قلم چی - ۱۳۹۸



۱) ۲
۲) -۲
۳) صفر
۴) -۱

۱۷ نمودار تابع $y=x^۲-x-۳$ را ۲ واحد به طرف xهای منفی سپس ۹ واحد به طرف yهای منفی انتقال می‌دهیم. نمودار جدید، در کدام بازه، زیر محور xها است؟ متوسط - خارج از کشور - ۱۳۹۸

۱) $(-۵,۲)$ ۲) $(-۵,۳)$ ۳) $(-۲,۳)$ ۴) $(-۲,۵)$

۱۸ اگر f و g توابعی وارون‌پذیر، با دامنه و برد $\mathbb{R}$ باشند و داشته باشیم: $f^{-۱}(g(۴))=۵$ و $g^{-۱}(f^{-۱}(۳))=۴$؛ آن‌گاه $f(f(۵))$ کدام است؟ متوسط - قلم چی - ۱۳۹۹

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) اطلاعات مسئله کافی نیست.

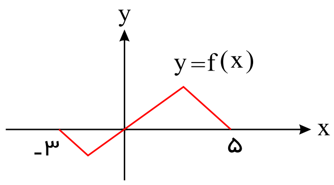
۱۹ اگر $f=\{(۱,۴),(۲,۳),(۳,۴)\}$ و $f-g=\{(۱,-۴),(۳,۱)\}$، آن‌گاه تابع $h(x)=\dfrac{۱}{g(x)-۸}$ شامل کدام عضو است؟ متوسط - قلم چی - ۱۳۹۸

۱) $(۱,\frac{۱}{۸})$ ۲) $(۳,\frac{-۱}{۵})$ ۳) $(۳,\frac{۱}{۵})$ ۴) $(۱,-\frac{۱}{۸})$

۲۰ اگر $f=\{(۱,۲),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۶)\}$ و $g=\{(۲,۳),(۴,۲),(۵,۶),(۳,۱)\}$ دو تابع باشند، برد تابع $(g^{-۱}of)-f$، کدام است؟ متوسط - خارج از کشور - ۱۳۹۸

۱) $\{-۱,۴\}$ ۲) $\{۲,۳\}$ ۳) $\{۳,۴\}$ ۴) $\{۲,-۱\}$

۲۱ اگر شکل زیر تابع $y=f(x)$ را نشان دهد، دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $g(x)=\sqrt{xf(-\frac{x}{۲})}$ کدام است؟ سخت - قلم چی - ۱۳۹۸



۱) $[-۱۰,۶]$ ۲) $[۰,۶]$
۳) $\{-۱۰,۰,۶\}$ ۴) $\{۰\}$

۲۲ تابع $f(x)=x^۳-۶x^۲+۱۲x-۷$ مفروض است. تابع $g(x)=\sqrt[۳]{x}$ با کدام‌یک از انتقال های زیر بر تابع $f^{-۱}$ منطبق می‌شود؟ سخت - قلم چی - ۱۳۹۸

۱) یک واحد به سمت چپ و ۲ واحد به سمت بالا
۲) یک واحد به سمت چپ و ۲ واحد به سمت پایین
۳) یک واحد به سمت راست و ۲ واحد به سمت بالا
۴) یک واحد به سمت راست و ۲ واحد به سمت پایین

۲۳ اگر $f(x)=x^۲-۴x+۳$، $(fog)(x)=x^۲+۳x+\frac{۵}{۴}$ و $g(x)$ یک تابع خطی با شیب مثبت باشد، ضابطهٔ تابع $g(f(x))$ کدام است؟ سخت - قلم چی - ۱۳۹۸

۱) $-x^۲+۴x+\frac{۱}{۲}$ ۲) $-x^۲+۴x-\frac{۱۳}{۲}$ ۳) $x^۲-۴x-\frac{۱}{۲}$ ۴) $x^۲-۴x+\frac{۱۳}{۲}$

۲۴ اگر $f(x)=x^۲-۲x-۳\ ;\ x\geq ۱$ باشد، نمودارهای دو تابع $f^{-۱}$ و $g(x)=\dfrac{x-۹}{۲}$ با کدام طول، متقاطع هستند؟ سخت - سراسری - ۱۳۹۸

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۱

۲۵ در کدام بازه‌ها، تابع $f(x)=\begin{cases}۲(x+۳)^۳ & ;x<-۳\\ -x^۲-۳x & ;-۳\le x<۰\\ \sqrt{x} & ;x\ge ۰\end{cases}$، به‌ترتیب از راست به چپ صعودی و نزولی است؟

سخت- قلم چی- ۱۳۹۸

۱) $(-۲,-۱)\ ,\ (-۱,+\infty)$
۲) $[-۱,۱]\ ,\ (-۳,-۲)$
۳) $[-۱,۰]\ ,\ [-۴,-۲]$
۴) $\left[-\frac{۳}{۲},-۱\right]\ ,\ [-۲,-۱]$

۲۶ نمودار تابع $f(x)=|۲x-۸|-|x+۳|$ در یک بازه اکیداً صعودی است. ضابطهٔ معکوس آن در این بازه کدام است؟

سخت- قلم چی- ۱۳۹۸

۱) $f^{-۱}(x)=x+۱۱\ ;\ x>-۷$
۲) $f^{-۱}(x)=x-۱۱\ ;\ x>-۵$
۳) $f^{-۱}(x)=x+۱۱\ ;\ x>-۵$
۴) $f^{-۱}(x)=x-۱۱\ ;\ x>-۷$

۲۷ اگر تابع پیوستهٔ $y=f(x)$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی باشد و داشته باشیم: $f(۳)=۰$؛ آن‌گاه دامنهٔ $g(x)=\sqrt[۴]{(x-۳)^۲ f(۲-x)}$ کدام است؟

سخت- قلم چی- ۱۳۹۹

۱) $(-۱,+\infty)$
۲) $[۳,+\infty)$
۳) $(۳,+\infty)$
۴) $[-۱,+\infty)$

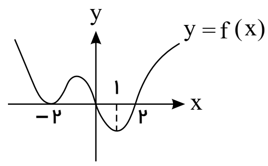
۲۸ کدام‌یک از توابع زیر یک‌به یک است؟

سخت- قلم چی- ۱۳۹۹

۱) $y=x^۲+۲\sqrt{x}$
۲) $y=x-x\sqrt{x}$
۳) $y=x+\frac{۱}{x}$
۴) $y=۲x^۲-|x|$

۲۹ شکل زیر نمودار تابع $y=f(x)$ است. دامنهٔ تعریف تابع با ضابطهٔ $y=\sqrt{(۲x-۲)f(x)}$ کدام است؟

سخت- قلم چی- ۱۳۹۹



۱) $\{-۲,۰,۲\}$
۲) $\mathbb{R}$
۳) $[۰,۱]\cup[۲,+\infty)\cup\{-۲\}$
۴) $[۰,+\infty)\cup\{-۲\}$

۳۰ اگر $f(x)=x^۲+۴x$ و $f(g(x))=x^۲-۲x-۳$ باشند و $g(x)$ اکیداً صعودی باشد، مساحت محصور بین نمودار تابع $g(x)$ و محورهای مختصات در ناحیهٔ چهارم کدام است؟

سخت- قلم چی- ۱۳۹۹

۱) ۱٫۵
۲) ۲٫۵
۳) ۳٫۵
۴) ۴٫۵

پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۷	۳	۱۳	۱	۱۹	۲	۲۵	۳
۲	۱	۸	۴	۱۴	۱	۲۰	۴	۲۶	۱
۳	۱	۹	۱	۱۵	۳	۲۱	۳	۲۷	۴
۴	۳	۱۰	۳	۱۶	۲	۲۲	۳	۲۸	۱
۵	۲	۱۱	۴	۱۷	۱	۲۳	۴	۲۹	۳
۶	۴	۱۲	۳	۱۸	۱	۲۴	۴	۳۰	۴

پاسخنامه تشریحی

۱ گزینه ۱

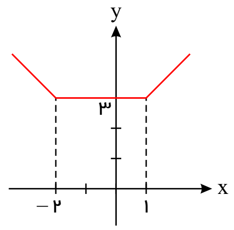
$$f(x)=\frac{۲x+۱}{\sqrt{x+۴}}\longrightarrow D_f:\ x+۴>۰\longrightarrow x>-۴$$

$$g(x)=\frac{x^۲-۲۵}{\sqrt{x+۴}}\longrightarrow D_g:\ x+۴>۰\longrightarrow x>-۴$$

$$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x|g(x)=۰\}=(x>-۴)\cap(x>-۴)-\{x|\frac{x^۲-۲۵}{\sqrt{x+۴}}=۰\}$$

$$=x>-۴-\{x=\pm ۵\}=(-۴,+\infty)-\{۵\}$$

۲ گزینه ۱ تابع داده‌شده یک تابع گلدانی است که در $x=-۲$ و $x=۱$ (ریشه‌های داخل قدرمطلق) دارای شکست است.



اکیداً نزولی : $\to x<-۲$

۳ گزینه ۱ نمودار این تابع از انتقال‌های افقی و عمودی نمودار تابع $y=x^۳$ به دست آمده است. اگر نمودار $y=x^۳$ را یک واحد به سمت راست (در راستای محور xها) و سپس دو واحد به سمت بالا (در راستای محور yها) انتقال دهیم ضابطهٔ $y=(x-۱)^۳+۲$ به‌دست می‌آید که همان ضابطهٔ مربوط به نمودار داده شده در صورت سؤال است. پس:

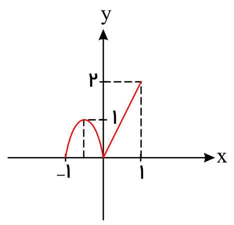
$a=۱\ ,\ \ b=۲\Rightarrow a\cdot b=۲$

۴ گزینه ۳

$$g=\{(-۲,۰),(۰,۳),(۱,-۱),(۳,-۲)\}\to g^{-۱}=\{(۰,-۲),(۳,۰),(-۱,۱),(-۲,۳)\}$$

$$\text{پس}:(fog^{-۱})(-۲)=f(g^{-۱}(-۲))=f(۳)=۹-\sqrt{۹}=۹-۳=۶$$

۵ گزینه ۲ برای رسم $y=\frac{۱}{۲}f(۲x)$ باید در تابع $y=f(x)$، طول نقاط را بر ۲ تقسیم کرده و عرض آن‌ها را در $\frac{۱}{۲}$ ضرب کنیم (یعنی عرض نقاط را هم بر ۲ تقسیم کنیم).



۶ گزینه ۴ می‌دانیم فقط تابع ثابت $f(x)=k$ هم صعودی و هم نزولی است، پس داریم:

$$f(x)=mx-۳x+۴=(m-۳)x+۴\Rightarrow \text{تابع ثابت}\Rightarrow m-۳=۰\to m=۳$$

۷ گزینه ۳ رادیکال با فرجهٔ فرد در تعیین دامنه هیچ نقشی ندارد بنابراین کافی است فقط زیر رادیکال با فرجهٔ زوج را بزرگ‌تر مساوی صفر قرار دهید.

$x-۴\geq ۰\to x\geq ۴$

در این دامنهٔ تعریف، سه عدد طبیعی ۱, ۲, ۳ وجود ندارد.

۸ گزینه ۴ می‌دانیم اگر $\left|\begin{smallmatrix}a\\b\end{smallmatrix}\right.\in f$ باشد آن‌گاه $\left|\begin{smallmatrix}a\\b\end{smallmatrix}\right. f^{-۱}\in$ است $(f(a)=b\to f^{-۱}(b)=a)$ چون $\left|\begin{smallmatrix}۱\\۳\end{smallmatrix}\right.\in g$ است پس $\left|\begin{smallmatrix}۳\\۱\end{smallmatrix}\right.\in g^{-۱}$ است.

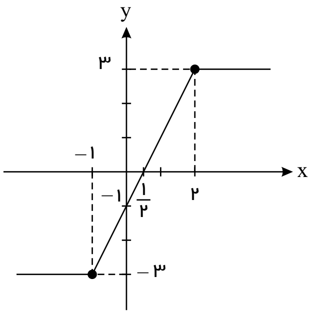
$$f^{-۱}(۲g^{-۱}(۳))=f^{-۱}(۲(۱))=f^{-۱}(۲)=\sqrt{۲+۷}=\sqrt{۹}=۳$$

۹ گزینه ۱ می‌دانیم اگر $f(a)=b$ باشد آن‌گاه $f^{-۱}(b)=a$ است.

$$(f^{-۱}og)(۱)=f^{-۱}(g(۱))=f^{-۱}(۲)=۰$$

توجه کنید $f(۰)=۲$ است پس $f^{-۱}(۲)=۰$ است.

۱۰ گزینه ۳ تابع داده‌شده یک تابع سرسره‌ای (آبشاری) است که در $x=-۱$ و $x=۲$ (ریشه‌های داخل قدرمطلق) دارای شکست است.



$\longrightarrow -۱ < x < ۲$: اکیداً صعودی

۱۱ گزینه ۴ می‌دانیم اگر $f(a) = b$ باشد آنگاه $f^{-۱}(b) = a$ است.

$$(g^{-۱}of^{-۱})(۸) = g^{-۱}(f^{-۱}(۸))$$

برای محاسبهٔ $f^{-۱}(۸)$ بدین صورت عمل می‌کنیم:

$$۸ = \frac{۲}{۵}x - ۴ \rightarrow \frac{۲}{۵}x = ۱۲ \rightarrow ۲x = ۶۰ \rightarrow x = ۳۰$$

$$\text{پس}: g^{-۱}(f^{-۱}(۸)) = g^{-۱}(۳۰)$$

برای محاسبهٔ $g^{-۱}(۳۰)$ بدین صورت عمل می‌نماییم.

$$۳۰ = x^۳ + x \rightarrow x = ۳$$

۱۲ گزینه ۳ نمودار $f(x)$ در راستای افقی با ضریب ۲ منبسط شده و سپس یک واحد به بالا رفته است، پس داریم:

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \frac{۱}{۲}x} f\left(\frac{۱}{۲}x\right) \xrightarrow{\text{یک واحد به بالا}} f\left(\frac{۱}{۲}x\right) + ۱ \Rightarrow g(x) = f\left(\frac{x}{۲}\right) + ۱$$

۱۳ گزینه ۱

$$y = f(۲ - x) \xrightarrow[x \rightarrow -x]{\text{قرینه نسبت به محور } y} y_۱ = f(x + ۲) \xrightarrow[x \rightarrow x+۲]{\text{۲ واحد چپ}} y_۲ = f(x + ۴) \xrightarrow{\text{طول‌ها } \frac{۱}{۳} \text{ برابر}} g(x) = f(۳x + ۴)$$

$$\text{پس}: -۱ \leq x \leq ۲ \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } y} -۲ \leq x \leq ۱ \xrightarrow{\text{۲ واحد چپ}} -۴ \leq x \leq -۱ \xrightarrow{\text{طول‌ها } \frac{۱}{۳} \text{ برابر}} -\frac{۴}{۳} \leq x \leq -\frac{۱}{۳}$$

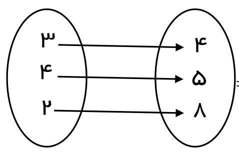
۱۴ گزینه ۱ می‌دانیم: برای اینکه ۳ واحد به سمت x های مثبت منتقل شود باید به‌جای x عبارت $x - ۳$ و برای اینکه به طرف y های منفی منتقل شود باید به کل تابع عدد -۲ اضافه شود؛ بنابراین داریم:

$$y = -(x - ۳)^۲ + ۲(x - ۳) + ۵ - ۲ = -x^۲ + ۶x - ۹ + ۲x - ۶ + ۳ \Rightarrow y = -x^۲ + ۸x - ۱۲$$

و برای اینکه این تابع بالای نیمساز ربع اول قرار گیرد باید:

$$-x^۲ + ۸x - ۱۲ > x \Rightarrow x^۲ - ۷x + ۱۲ < ۰ \Rightarrow (x - ۳) \cdot (x - ۴) < ۰ \Rightarrow ۳ < x < ۴$$

۱۵ گزینه ۳

f شرط تابع بودن $\Rightarrow a + ۱ = ۴ \Rightarrow a = ۳ \Rightarrow$  $\Rightarrow f = \{(۳, ۴), (۴, ۵), (۲, ۸)\}$

$$g = \{(x, ۲x - ۱) | x \in R_f\} = \{(۴, ۷), (۵, ۹), (۸, ۱۵)\} \Rightarrow D_f \cap D_g = \{۴\}$$

$$(f + g)(۴) = f(۴) + g(۴) = ۵ + ۷ = ۱۲$$

۱۶ گزینه ۲ کافی است ضابطهٔ معکوس تابع داده‌شده را به‌دست آورید. برای این کار x را برحسب y به‌دست آورده و سپس جای x و y را عوض کنید.

$$y = \log_۲^{x+a} + b \rightarrow y - b = \log_۲^{x+a} \xrightarrow{\log_b^a = c \rightarrow b^c = a} x + a = ۲^{y-b}$$

$$\rightarrow x = ۲^{y-b} - a \rightarrow f^{-۱}(x) = ۲^{x-b} - a$$

شکل داده‌شده مربوط به $y = ۲^{x+۱} + ۱$ است بنابراین $a = b = -۱$ و درنتیجه $a + b = -۲$ است.

۱۷ گزینه ۱

$$y = x^۲ - x - ۳ \xrightarrow[x \rightarrow x+۲]{\text{۲ واحد به چپ}} y = (x + ۲)^۲ - (x + ۲) - ۳ \xrightarrow{\text{۹ واحد پایین}} y = (x + ۲)^۲ - (x + ۲) - ۳ - ۹$$

نمودار زیر محور xها قرار دارد یعنی باید نامعادلهٔ $y < ۰$ را حل کنیم.

$$y < ۰ \Rightarrow (x+۲)^{۲} - (x+۲) - ۱۲ < ۰ \Rightarrow x^{۲} + ۴x + ۴ - x - ۲ - ۱۲ < ۰$$

$$\Rightarrow x^{۲} + ۳x - ۱۰ < ۰ \Rightarrow (x-۲)(x+۵) < ۰ \Rightarrow -۵ < x < ۲ \Rightarrow x \in (-۵, ۲)$$

۱۸ گزینه ۱ می‌دانیم که اگر $f(a) = b$ باشد آن‌گاه $f^{-۱}(b) = a$ است.

$$f^{-۱}(g(۴)) = ۵ \to f(۵) = g(۴) \quad *$$

$$g^{-۱}(f^{-۱}(۳)) = ۴ \to g(۴) = f^{-۱}(۳) \to f(g(۴)) = ۳ \overset{*}{\to} f(f(۵)) = ۳$$

۱۹ گزینه ۲ می‌دانیم $D_{f-g} = D_f \cap D_g$ و چون $D_{f-g} = \{۱, ۳\}$ پس ۳ و ۱ حتماً در دامنهٔ g هستند.

$$(۱, -۴) \in f - g \longrightarrow (f-g)(۱) = -۴ \longrightarrow f(۱) - g(۱) = -۴ \longrightarrow ۴ - g(۱) = -۴ \longrightarrow g(۱) = ۸$$

$$(۳, ۱) \in f - g \longrightarrow (f-g)(۳) = ۱ \longrightarrow f(۳) - g(۳) = ۱ \longrightarrow ۴ - g(۳) = ۱ \longrightarrow g(۳) = ۳$$

$$\text{پس}: \begin{cases} (۱, ۸) \in g \longrightarrow \dfrac{۱}{g(x) - ۸} : (۱, \dfrac{۱}{۸ - ۸}) \quad \text{غیر قابل قبول} \\ (۳, ۳) \in g \longrightarrow \dfrac{۱}{g(x) - ۸} : (۳, \dfrac{۱}{۳ - ۸}) = (۳, \dfrac{-۱}{۵}) \end{cases}$$

۲۰ گزینه ۴

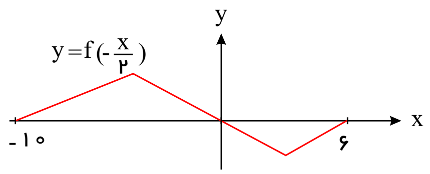
$$g = \{(۲, ۳), (۴, ۲), (۵, ۶), (۳, ۱)\} \to g^{-۱}\{(۳, ۲), (۲, ۴), (۶, ۵), (۱, ۳)\}$$

$$g^{-۱}of(x) : \begin{cases} g^{-۱}(f(۱)) = g^{-۱}(۲) = ۴ \\ g^{-۱}(f(۲)) = g^{-۱}(۵) = \varnothing \\ g^{-۱}(f(۳)) = g^{-۱}(۴) = \varnothing \\ g^{-۱}(f(۴)) = g^{-۱}(۶) = ۵ \end{cases} \to g^{-۱}of(x) = \{(۱, ۴), (۴, ۵)\}$$

$$\begin{cases} g^{-۱}of(x) = \{(۱, ۴), (۴, ۵)\} \\ f = \{(۱, ۲), (۲, ۵), (۳, ۴), (۴, ۶)\} \end{cases} \to g^{-۱}of(x) = \{(۱, ۴ - ۲), (۴, ۵ - ۶)\} = \{(۱, ۲), (۴, -۱)\}$$

بنابراین برد تابع به‌صورت $\{۲, -۱\}$ است.

۲۱ گزینه ۳ برای رسم $y = f(-\frac{۱}{۲}x)$، باید در نمودار $y = f(x)$ طول نقاط را بر $-\frac{۱}{۲}$ تقسیم کنیم (در ۲- ضرب کنیم).



زیر رادیکال باید بزرگتر مساوی صفر باشد:

$$g(x) = \sqrt{xf(-\frac{x}{۲})} \Rightarrow xf(-\frac{x}{۲}) \geq ۰$$

x	-۱۰		۰		۶
x		$-$	۰	$+$	
$f(-\frac{x}{۲})$	۰	$+$	۰	$-$	۰
$xf(-\frac{x}{۲})$	۰	$-$	۰	$-$	۰

عبارت $xf(-\frac{x}{۲})$ در نقاط $x = -۱۰, ۰, ۶$ صفر و در مابقی نقاط منفی است، پس داریم:

$$D_g = \{-۱۰, ۰, ۶\}$$

۲۲ گزینه ۳

$$f(x) = x^{۳} - ۶x^{۲} + ۱۲x - ۷ = x^{۳} - ۶x^{۲} + ۱۲x - ۸ + ۱ = (x - ۲)^{۳} + ۱$$

برای یافتن $f^{-۱}$ باید x را برحسب y حل کنیم.

$$(x-۲)^{۳} + ۱ = y \Rightarrow (x-۲)^{۳} = y - ۱ \Rightarrow x - ۲ = \sqrt[۳]{y - ۱} \Rightarrow x = ۲ + \sqrt[۳]{y - ۱}$$

$$y = f^{-۱}(x) = ۲ + \sqrt[۳]{x - ۱}$$

$$g(x) = \sqrt[۳]{x} \xrightarrow{x \to x-۱} y = \sqrt[۳]{x - ۱} \to f^{-۱}(x) = ۲ + \sqrt[۳]{x - ۱}$$

برای رسم f^{-1} باید نمودار $g(x)=\sqrt[۳]{x}$ را یک واحد به راست و دو واحد به بالا منتقل کنیم.

۲۳ گزینه ۴

$$f(x)=x^۲-۴x+۳ \to f(g(x))=g^۲(x)-۴g(x)+۳$$

$$fog(x)=x^۲+۳x+\frac{۵}{۴} \to f(g(x))=x^۲+۳x+\frac{۵}{۴}$$

پس : $g^۲(x)-۴g(x)+۳=x^۲+۳x+\frac{۵}{۴} \to (g(x)-۲)^۲-۴+۳=(x+\frac{۳}{۲})^۲-\frac{۹}{۴}+\frac{۵}{۴}$

$$\to (g(x)-۲)^۲-۱=(x+\frac{۳}{۲})^۲-۱ \to (g(x)-۲)^۲=(x+\frac{۳}{۲})^۲$$

$$\to \begin{cases} g(x)-۲=x+\frac{۳}{۲} \to g(x)=x+\frac{۷}{۲} \to \text{شیب خط، مثبت است} \\ g(x)-۲=-x-\frac{۳}{۲} \to g(x)=-x+\frac{۱}{۲} \to \text{شیب خط، منفی است} \end{cases}$$

$$g(f(x))=g(f(x))=x^۲-۴x+۳+\frac{۷}{۲}=x^۲-۴x+\frac{۱۳}{۲}$$

۲۴ گزینه ۴ برای پیدا کردن تابع وارون، کافی است x را برحسب y به‌دست آورده و سپس جای x و y را عوض کنیم.

$$f(x)=x^۲-۲x-۳ \to y=(x-۱)^۲-۱-۳ \to y=(x-۱)^۲-۴ \to (x-۱)^۲=y+۴$$

$$\to x-۱=\pm\sqrt{(y+۴)} \xrightarrow{x\geq ۱} x-۱=\sqrt{y+۴} \to x=۱+\sqrt{y+۴} \to f^{-1}(x)=۱+\sqrt{x+۴}$$

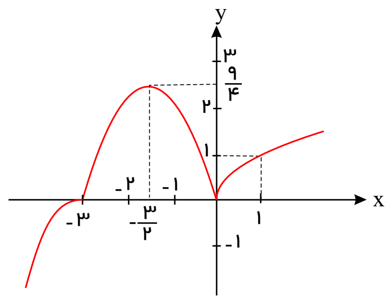
$$f^{-1}(x)=g(x) \to ۱+\sqrt{x+۴}=\frac{x-۹}{۲} \xrightarrow{\text{مشاهدهٔ گزینه‌ها}} x=۲۱$$

توجه کنید حل معادلهٔ آخر بدین صورت است:

$$۲\sqrt{x+۴}=x-۱۱ \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۴x+۱۶=x^۲+۱۲۱-۲۲x \to x^۲-۲۶x+۱۰۵=۰$$

$$\to (x-۲۱)(x-۵)=۰ \to \begin{cases} x=۲۱ \quad \text{ق‌ق} \\ x=۵ \;(\text{در معادله صدق نمی‌کند}) \quad \text{غ‌ق‌ق} \end{cases}$$

۲۵ گزینه ۳ نمودار تابع f را رسم می‌کنیم، توجه کنید سهمی $y=-x^۲-۳x$ دارای رأس به مختصات $S\left|\begin{array}{l} -\frac{b}{۲a}=-\frac{۳}{۲} \\ \frac{۴ac-b^۲}{۴a}=\frac{۹}{۴} \end{array}\right.$ است که محور طول‌ها را در ۰ و ۳− قطع می‌کند.



تابع در بازهٔ $(-\infty,-\frac{۳}{۲}]$ صعودی، در بازهٔ $[-\frac{۳}{۲},۰]$ نزولی و در بازهٔ $[۰,+\infty)$ صعودی است.

$$[-۴,-۲]\subset(-\infty,-\frac{۳}{۲}] \Rightarrow [-۴,-۲] \Rightarrow \text{نزولی}$$

$$[-۱,۰]\subset[-\frac{۳}{۲},۰] \Rightarrow [-۱,۰] \Rightarrow \text{صعودی}$$

۲۶ گزینه ۱ ابتدا قدرمطلق‌ها را از بین می‌بریم.

$$f(x)=\begin{cases} -(۲x-۸)+(x+۳)=-x+۱۱ & ,\ x<-۳ \\ -(۲x-۸)-(x+۳)-۳x+۵ & ,\ -۳\leq x\leq ۴ \\ (۲x-۸)-(x+۳)=x-۱۱ & ,\ x>۴ \end{cases}$$

بنابراین تابع در بازهٔ $x>۴$ اکیداً صعودی است (خط با شیب مثبت)

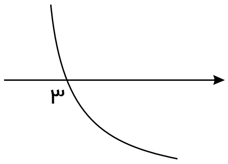
$$y=x-۱۱ \Rightarrow x=y+۱۱ \xrightarrow{\text{جای } x \text{ و } y \text{ را عوض می‌کنیم.}} y=x+۱۱ \Rightarrow f^{-1}(x)=x+۱۱$$

برای تعیین دامنهٔ f^{-1}، برد f را در این بازه تعیین می‌کنیم:

$$y = x - ۱۱ \xrightarrow{x>۴} x - ۱۱ > ۴ - ۱۱ \Rightarrow x - ۱۱ > -۷ \Rightarrow f(x) > -۷$$

برد تابع f در این بازه، همان دامنهٔ f^{-1} می‌باشد.

۲۷ **گزینه ۴** چون تابع f یک تابع اکیداً نزولی و پیوسته و با دامنهٔ $\mathbb{R}$ است و $f(۳) = ۰$ می‌باشد می‌توان شکل فرضی



را برای آن فرض کرد.

$$\text{زیر رادیکال} \geq ۰ \to (x-۳)^۲ f(۲-x) \geq ۰ \to \begin{cases} (x-۳)^۲ = ۰ \to x = ۳ \\ f(۲-x) = ۰ \xrightarrow{f(۳)=۰} ۲ - x = ۳ \to x = -۱ \end{cases}$$

$\to$

x	$-\infty$		-۱		۳		$+\infty$
عبارت ≥ ۰		$-$	۰	$+$	۰	$+$	

$\to D_g = [-۱, +\infty)$

۲۸ **گزینه ۱** بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ ۱: تابع $y = ۲\sqrt{x}$ با شرط $x \geq ۰$ اکیداً صعودی است و $y = x^۲$ هم با شرط $x \geq ۰$ اکیداً صعودی است و مجموع دو تابع اکیداً صعودی، اکیداً صعودی و در نتیجه یک‌به‌یک است.

گزینهٔ ۲: در تابع داده شده به جای y ، صفر می‌گذاریم:

$$x - x\sqrt{x} = ۰ \to x(۱ - \sqrt{x}) = ۰ \to \begin{cases} x = ۰ \\ x = ۱ \end{cases} \to \text{یک به یک نمی‌باشد.}$$

گزینهٔ ۳: در تابع داده شده به جای y ، عدد ۳ را می‌گذاریم.

$$x + \frac{۱}{x} = ۳ \xrightarrow{\times x} x^۲ + ۱ = ۳x \to x^۲ - ۳x + ۱ = ۰ \to \Delta > ۰$$

به‌ازای دو مقدار x، مقدار تابع برابر ۳ می‌شود بنابراین یک‌به‌یک نیست.

گزینهٔ ۴: در تابع داده شده به جای y ، صفر می‌گذاریم.

$$۲x^۲ - |x| = ۰ \to ۲|x|^۲ - |x| = ۰ \to |x|(۲|x| - ۱) = ۰$$
$$\to \begin{cases} |x| = ۰ \to x = ۰ \\ |x| = \frac{۱}{۲} \to x = \pm\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

به‌ازای سه مقدار x ، مقدار تابع برابر صفر می‌شود بنابراین یک‌به‌یک نیست.

۲۹ **گزینه ۳** عبارت زیر رادیکال باید بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد:

$$(۲x - ۲)f(x) \geq ۰ \Rightarrow \begin{cases} ۲x - ۲ = ۰ \Rightarrow x = ۱ \\ f(x) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۲ \\ x = ۰ \\ x = -۲ \to \text{ریشهٔ مرتبهٔ زوج} \end{cases} \end{cases}$$

حال بعد از پیدا کردن ریشه‌ها جدول تعیین علامت را رسم می‌کنیم:

x		-۲		۰		۱		۲	
$۲x - ۲$	$-$		$-$		$-$	۰	$+$		$+$
$f(x)$	$+$	۰	$+$	۰	$-$		$-$	۰	$+$
$(۲x-۲)f(x)$	$-$	۰	$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$

$\to D = [۰, ۱] \cup [۲, +\infty) \cup \{-۲\}$

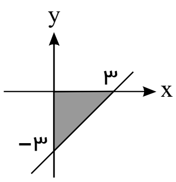
۳۰ **گزینه ۴** برای بدست آوردن ضابطهٔ تابع g ، باید در تابع f به‌جای x ها g بگذاریم:

$$g^۲ + ۴g = x^۲ - ۲x - ۳ \xrightarrow{\text{طرفین}\ +۴} g^۲ + ۴g + ۴ = x^۲ - ۲x + ۱ \Rightarrow (g+۲)^۲ = (x-۱)^۲$$

از طرفین جذر می‌گیریم:

$$\Rightarrow |g + ۲| = |x - ۱| \Rightarrow g + ۲ = \pm(x - ۱)$$

$\Rightarrow g = x - ۳ \to$



$\to S = \frac{۳ \times ۳}{۲} = ۴/۵$

$\Rightarrow g = -x - ۱$ (غ ق ق اکیداً نزولی است)