



فصل ۶

سطح و حجم



- حجم های هندسی
- محاسبه حجم های منشوری
- مساحت جانبی و کل
- حجم و سطح

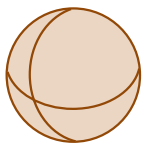
اهمیت بسته بندی محصولات غذایی کمتر از اهمیت تولید آن محصول نیست. برای مثال در بسته بندی شیرینی و شکلات کیفیت و ظاهر بسته بندی در فروش آن تأثیر زیادی دارد. یکی از موضوعات مهم در این بسته بندی ها رابطه بین سطح و حجمی است که با آن سطح ساخته می شود.



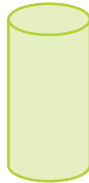
- ۱- به اطراف خود (کلاس، خانه، خیابان و ...) به دقت نگاه کنید.
آیا چیزی پیدا می کنید که حجم نداشته باشد؟
در تصویر مقابل چه نوع حجم هایی را می بینید؟
آیا همه آنها شکل هندسی دارند؟
آیا می توانید یک طبقه بندی از انواع حجم ها ارائه کنید؟

حجم ها را می توان به دو دسته هندسی و غیرهندسی تقسیم کرد. حجم های هندسی شکل های مشخص و تعریف شده دارند. حجم های هندسی را می توان به سه دسته اصلی تقسیم کرد. منشوری - کروی - هرمی. برخی از حجم های هندسی نیز ترکیبی از این سه نوع اند.

- ۱- در تصویر فعالیت بالا حجم های هندسی را با ✓ و غیرهندسی را با ✗ مشخص کنید.
در حجم های هندسی نوع آن را تعیین کنید.
در حجم های ترکیبی نیز مشخص کنید که از چه نوع حجم هایی ساخته شده اند.
- ۲- با توجه به شکل های زیر خصوصیت های سه نوع حجم هندسی زیر را بنویسید.



حجم های کروی



حجم های منشوری



حجم های هرمی

حجم های منشوری :

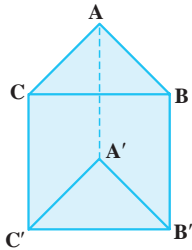
حجم های هرمی :

حجم های کروی :

حجم‌های منشوری بین دو صفحه موازی قرار می‌گیرند.

به این دو سطح موازی که سطح منشوری را قطع می‌کنند، **قاعده** و به سطح‌های اطراف آن **وجه‌های جانبی** می‌گویند. به محل برخورد سطح‌ها **یال** و به نقطه برخورد هر سه سطح **رأس** می‌گویند.

۱- در هر یک از منشورهای زیر مشخص کنید چند وجه جانبی دارد؛ یال‌ها، رأس‌ها و قاعده‌ها را نام ببرید.



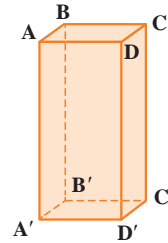
منشور سه پهلو

تعداد وجه‌های جانبی :

رأس‌ها :

یال‌ها :

قاعده‌ها :



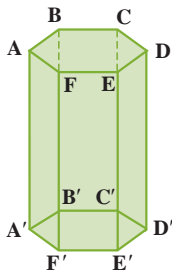
منشور چهار پهلو

تعداد وجه‌های جانبی :

رأس‌ها :

یال‌ها :

قاعده‌ها :



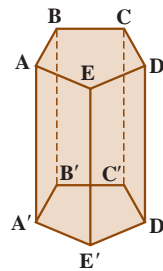
منشور شش پهلو

تعداد وجه‌های جانبی :

رأس‌ها :

یال‌ها :

قاعده‌ها :



منشور پنج پهلو

تعداد وجه‌های جانبی :

رأس‌ها :

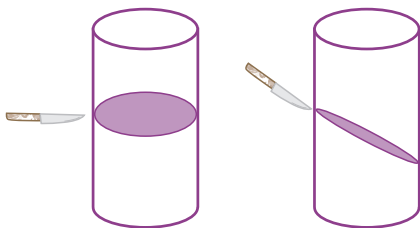
یال‌ها :

قاعده‌ها :

۲- برای اینکه در نام بردن یال و رأس چیزی جا نینفتد، از چه راهبردی استفاده می‌کنید؟

۳- آیا استوانه هم یک حجم منشوری است؟ چرا؟

با خمیر مجسمه‌سازی (یا می‌توانید از یک سیب‌زمینی استفاده کنید) یک استوانه بسازید. با یک قیچی یا چاقو مانند شکل‌های



مقابل آن را برش بزنید. سطح برش خورده را رنگ کنید و روی یک کاغذ بزنید، اثر آن به چه شکلی است؟

همین فعالیت را می‌توانید با برش‌های دیگر تکرار کنید. همچنین به جای استوانه

می‌توانید منشورهای دیگری را هم امتحان کنید. به این کار **مقطع زدن** می‌گویند.

نرم‌افزارهای زیادی هستند که می‌توانند این فعالیت را شبیه‌سازی کنند. در صورت تمایل از آنها استفاده کنید.

۱- آیا ممکن است مقطع یک کره و یک استوانه هم شکل باشند؟ در چه صورت؟

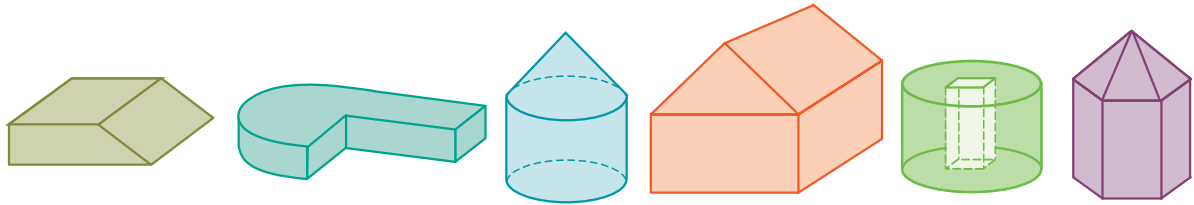
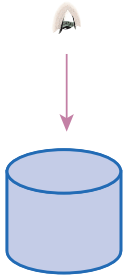
آیا ممکن است مقطع یک منشور و یک هرم هم شکل باشند؟

۲- یک استوانه از دید بالا به چه شکلی دیده می شود؟

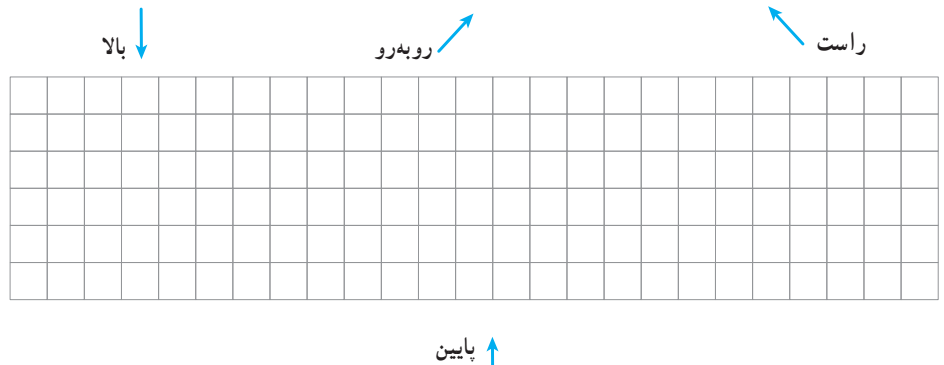
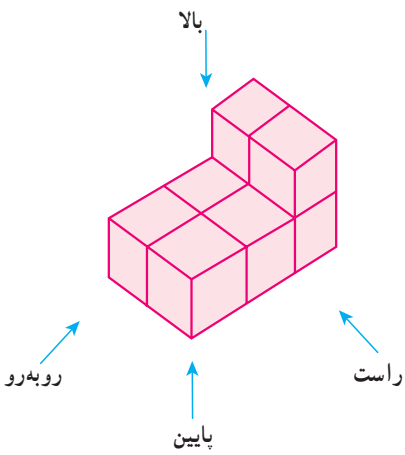
یک منشور ۶ پهلو به چه شکلی دیده می شود؟

رأس های منشوری با قاعده ۶ ضلعی منتظم روی دایره قاعده استوانه است. این حجم از بالا به چه شکلی دیده می شود؟

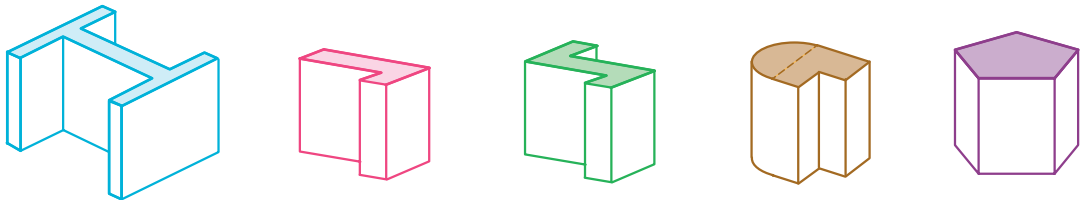
۳- مشخص کنید هر کدام از حجم های زیر، ترکیبی از کدام حجم ها هستند؟



۴- حجم مقابل را از ۴ جهت نگاه می کنیم این حجم از ۴ طرف به چه شکلی دیده می شود؟



۵- قاعده منشورهای زیر را رسم کنید (در واقع دید از بالا یا همان مقطع منشور است).

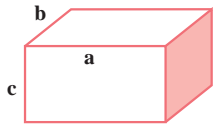


۶- بلورهای (مصوب فرهنگستان Crystal) معدنی به طور طبیعی شکل می گیرند، ولی دارای حجم هندسی اند. برای نمونه

مشخص کنید ۳ بلور زیر از چه حجم هایی درست شده اند؟



۱- در دوره دبستان آموختید که حجم یک مکعب مستطیل برابر است با حاصل ضرب طول، عرض و ارتفاع. با توجه به درس جبر که در فصل قبل آموختید، حجم مکعب مستطیل را با یک رابطه جبری نشان دهید.



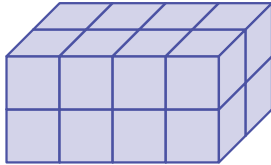
$$V = \text{حجم}$$

۲- قاعده مکعب مستطیل از ۸ مربع به ضلع یک سانتی متر درست شده است. (4×2)

اگر روی این قاعده، مکعب مستطیلی به ارتفاع ۲ سانتی متر درست کنیم،

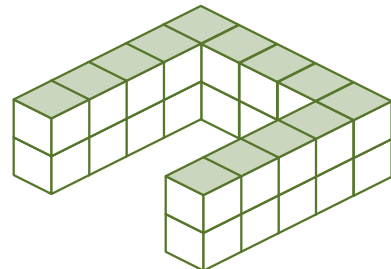
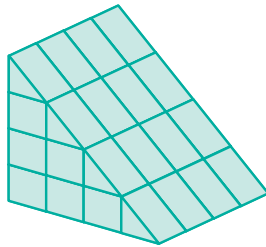
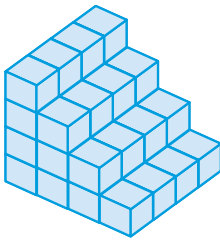
حجم آن چقدر می شود؟

اگر قاعده مکعب مستطیل 4×3 باشد، با همان ارتفاع چه حجمی درست می شود؟



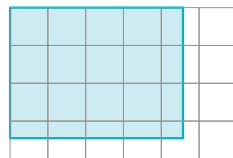
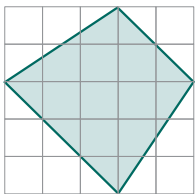
۳- همچنین آموختید که واحد حجم مکعبی به ضلع ۱ سانتی متر یا ۱ متر، یک **سانتی متر مکعب** یا یک **مترمکعب** می گویند.

مشخص کنید که هر کدام از حجم های زیر از چند مکعب واحد درست شده اند.



۴- اکنون هر کدام از شکل های زیر را به مربع هایی به ضلع ۱ سانتی متر تقسیم کنید تا مشخص شود قاعده هر کدام چند مربع به

ضلع یک سانتی متر است (می توانید از عددهای کسری هم استفاده کنید).



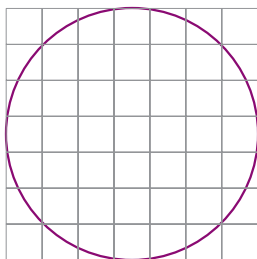
اگر روی این قاعده ها منشوری به ارتفاع ۳ سانتی متر درست کنیم، حجم هر کدام چقدر می شود؟

اگر به همین ترتیب بتوانیم مساحت قاعده هر منشور را با مربع های واحد سطح تقریب بزنیم، چگونه

می توانیم حجم شکل های منشوری را به دست آوریم؟

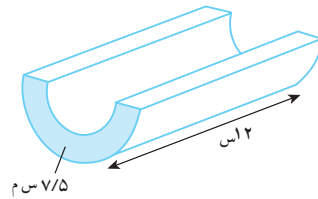
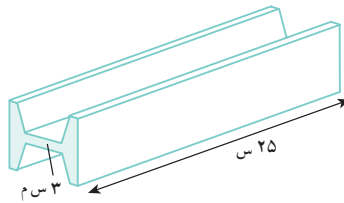
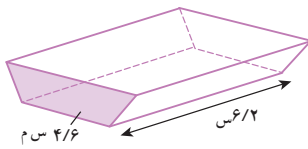
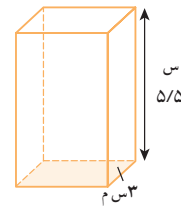
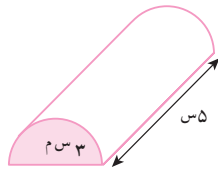
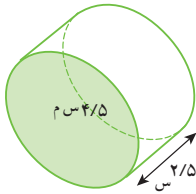
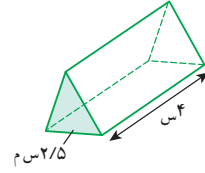
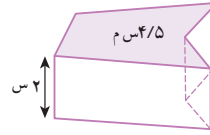
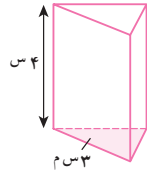
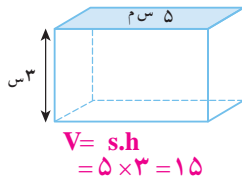
برای مثال قاعده یک استوانه را که به شکل دایره است، با مربع های واحد تقریب بزنید و حجم

استوانه به ارتفاع ۳ سانتی متر را به طور تقریبی به دست آورید.

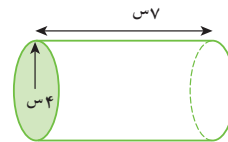
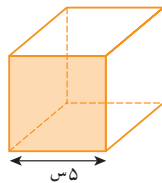
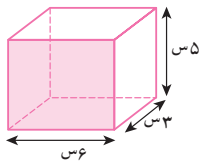


۱- با توجه به فعالیت صفحه قبل، رابطه جبری به دست آوردن حجم های منشوری (V) را که در آن مساحت قاعده منشور (S) و ارتفاع منشور (h) است، بنویسید.

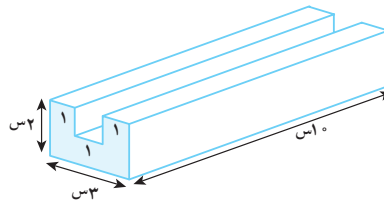
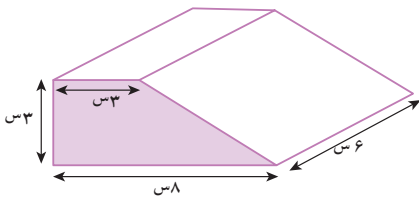
۲- با توجه به رابطه بالا و مساحت قاعده داده شده، حجم هر شکل را محاسبه کنید.



۳- ابتدا مساحت قاعده و سپس حجم هر یک از اجسام زیر را حساب کنید. برای به دست آوردن مساحت و حجم هر شکل



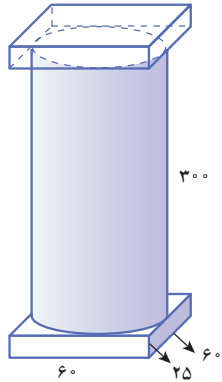
رابطه های جبری را بنویسید.



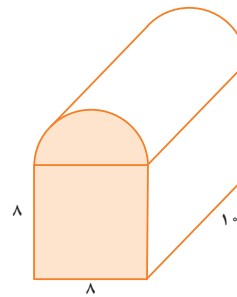
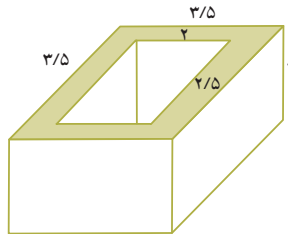
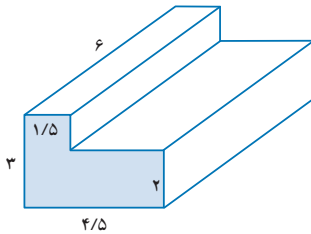
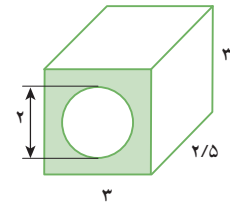
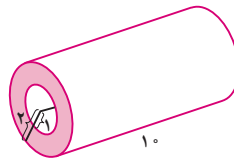
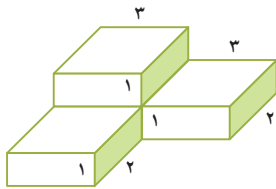
۴- منبع آبی به شکل استوانه است که شعاع قاعده آن ۸/۸ متر و ارتفاعش

۲ متر است. این منبع چند متر مکعب آب می گیرد؟

۵- یک جعبه دستمال کاغذی به شکل مکعب مستطیل داریم که طول آن ۲۵، عرض آن ۱۲ و ارتفاعش ۵ سانتی متر است. تعیین کنید چند عدد از این جعبه‌ها در یک کارتن که به شکل مکعب مستطیل به ابعاد ۵۰ و ۳۰ و ۲۴ سانتی متر است، جا می‌گیرد؟



- ۱- حجم ستون شکل مقابل را به صورت تقریبی پیدا کنید.
(کل شکل را مکعب مستطیل و یا استوانه در نظر بگیرید).
حالا کمی دقیق‌تر محاسبه کنید و آن را به سه قسمت تقسیم کنید و حجم سه تکه را جداگانه حساب کنید و مجموع را به دست آورید (شعاع قاعده استوانه چند است؟).
تفاوت دو جواب را به دست آورید.
- ۲- حجم اشکال زیر را به دست آورید.



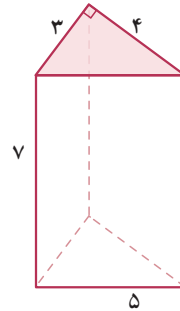
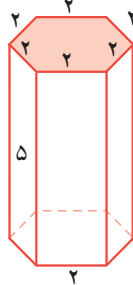
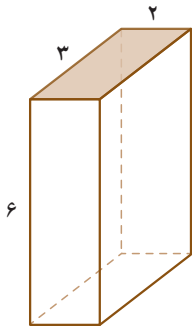
۳- چاهی به عمق ۱۲ متر حفر کرده‌ایم. شعاع دهانه این چاه ۴/۰ متر است. وقتی خاک کنده و بیرون ریخته می‌شود، حجم آن ۱/۳ برابر می‌شود. اگر خاک این چاه بعد از بیرون آمدن در سطحی به ابعاد ۴ و ۵ متر به طور یکنواخت ریخته شود تا یک مکعب مستطیل به وجود آید، ارتفاع این مکعب مستطیل چقدر خواهد شد؟

۴- حوضی است به شکل مکعب مستطیل که ابعاد آن ۴ و ۳ و ۱/۵ متر است. این حوض خالی را با شیر آبی که در هر دقیقه ۶۰ لیتر آب وارد آن می‌کند، پر می‌کنیم. چند ساعت طول می‌کشد تا حوض پر شود؟

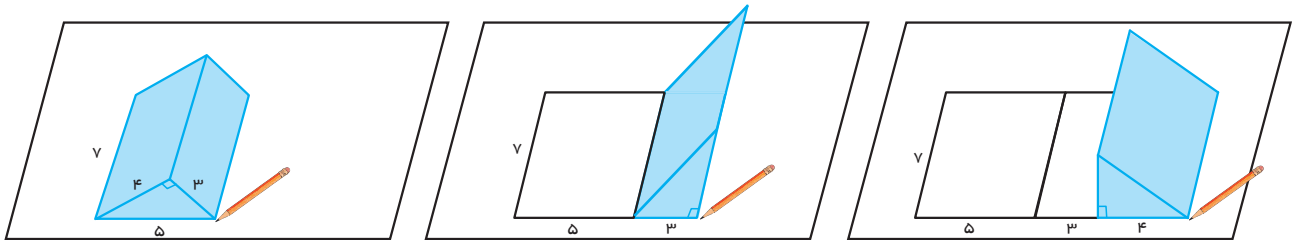
۵- یک پارچ به شکل استوانه است که ارتفاع آن ۳۰ سانتی متر و شعاع قاعده آن ۸ سانتی متر است. آب داخل این پارچ را در لیوان‌هایی به شکل استوانه که ارتفاع آنها ۱۰ سانتی متر و شعاع قاعده آن ۴ سانتی متر است، می‌ریزیم. این آب چند لیوان را پُر می‌کند؟

۶- قاعده یک منشور سه پهلو مثلث قائم الزاویه‌ای که اندازه ضلع‌های قائمه آن ۳ و ۴ است. ارتفاع این منشور ۶ سانتی متر است. حجم این منشور را پیدا کنید.

۱- مساحت همهٔ وجه‌های جانبی منشورهای زیر را به دست آورید. هر وجه جانبی چه شکلی دارد؟ به مجموع این مساحت‌ها مساحت جانبی شکل می‌گویند.



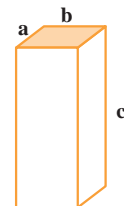
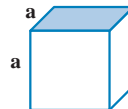
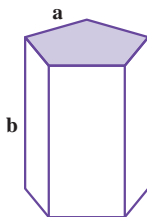
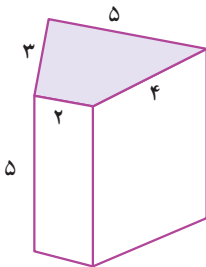
۲- برای به دست آوردن مجموع مساحت جانبی منشور سه پهلوئی بالا به صورت زیر، آن را روی کاغذ قرار می‌دهیم، و به اندازهٔ طول هر ضلع یک علامت می‌گذاریم.



با توجه به شکل‌های بالا چگونه می‌توانستیم ساده‌تر مساحت جانبی را به دست آوریم؟

۳- با توجه به سؤال بالا اگر مساحت را با S ، محیط را با P و ارتفاع را با h نشان دهیم. رابطهٔ جبری مساحت جانبی منشورهای بالا را بنویسید.

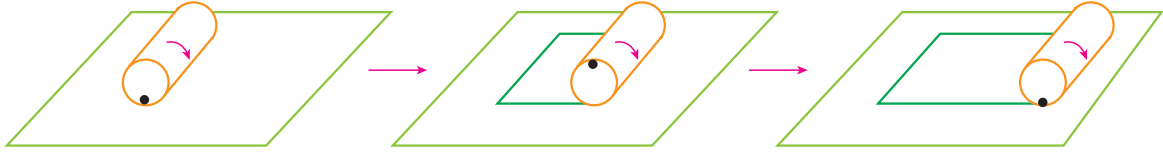
۱- مساحت جانبی شکل‌های زیر را پیدا کنید.



۲- ستونی به شکل منشور ۶ پهلوست که هر ضلع آن $\frac{1}{2}$ متر و ارتفاع آن ۵ متر است. می‌خواهند بدنهٔ جانبی این ستون را کاشی کاری

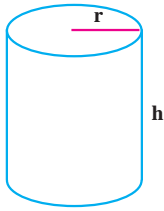
کنند. چند متر مربع کاشی لازم است؟

۱- یک استوانه را به شکل زیر روی یک صفحه می‌غلطانیم و ابتدا و انتهای کار را مشخص می‌کنیم.



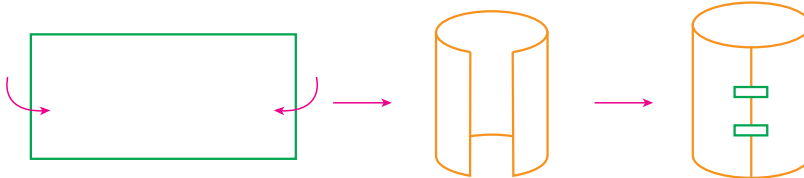
با این کار چه شکلی به دست می‌آید؟
طول و عرض آن چگونه به دست می‌آید؟
مساحت این شکل چگونه به دست می‌آید؟

۲- با توجه به سؤال بالا مساحت جانبی یک استوانه به ارتفاع h و شعاع قاعده r را با عبارت جبری نشان دهید.



$S = \underline{\hspace{2cm}}$

۱- با توجه به سؤال بالا با یک مستطیل می‌توان یک سطح استوانه‌ای درست کرد.

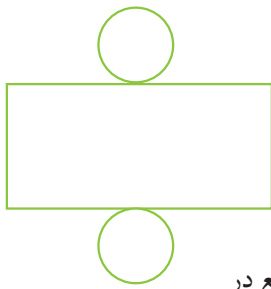


این سطح استوانه را روی کاغذ بگذارید و دور آن خط بکشید. این دایره، قاعده استوانه است. چون استوانه ۲ قاعده دارد.

۲ دایره و یک مستطیل **مساحت کل** استوانه را تشکیل می‌دهند.

شکل مقابل را گسترده استوانه می‌گویند.

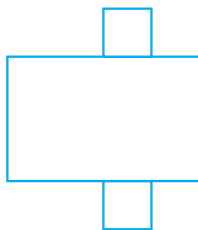
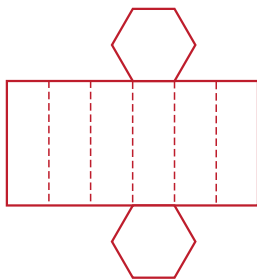
چه رابطه‌ای بین دایره و مستطیل در این گسترده وجود دارد؟



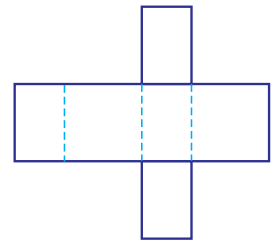
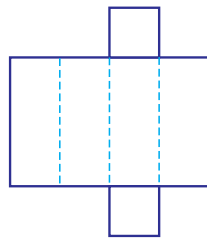
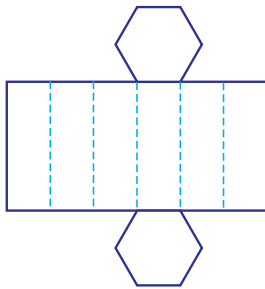
۲- گسترده یک منشور ۶ پهلو با قاعده ۶ ضلعی منظم و گسترده یک مکعب مستطیل با قاعده مربع در

شکل‌های زیر رسم شده‌اند.

چه رابطه‌ای بین قاعده‌ها و مستطیل‌ها وجود دارد؟



۱- در شکل زیر گسترده چند منشور داده شده است. آنها را روی کاغذ بکشید و منشورها را درست کنید و به کلاس بیاورید.



در چه صورت گسترده شکل وسط به یک مکعب تبدیل می شود؟



۲- یک غلتک روی زمین آسفالت شده باید ۴ بار غلت بزند تا سطح آن صاف شود.

اگر شعاع غلتک ۵۰ سانتی متر و ارتفاع استوانه آن ۱ متر باشد، برای آسفالت کردن سطح یک

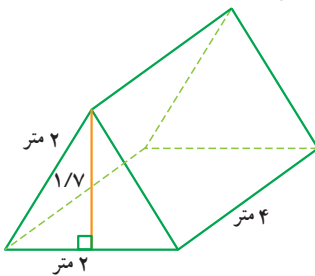
کوچه به طول ۲۰ و عرض ۴ متر، این غلتک باید به طور تقریبی چند بار بچرخد؟

۳- یک چرخ ماشین که کاملاً خیس شده است، با ۱۰ دور چرخیدن روی زمین جای خود را مشخص می کند تا خشک شود.

اگر این چرخ به ضخامت ۲۰ سانتی متر و قطر ۷۰ سانتی متر باشد، چه مساحتی از زمین را خیس خواهد کرد؟

۴- یک چادر مسافرتی به شکل مقابل است. چند متر پارچه برای ساخت آن به کار رفته است؟

حجم این چادر چقدر است؟



۵- یک مخزن نفت به شکل استوانه ای است که شعاع قاعده آن ۳ متر و ارتفاعش ۵ متر است. می خواهیم بدنه خارجی و سقف

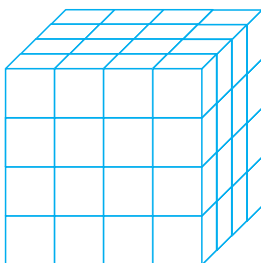
آن را رنگ بزنیم. اگر هزینه رنگ کردن هر متر مربع ۳۰۰۰ تومان باشد، برای رنگ کردن این مخزن چقدر باید هزینه کرد؟

۶- می خواهیم با مقوا مکعبی به ضلع ۱۰ cm بسازیم. چند سانتی متر مربع مقوا به کار می رود؟

۷- یک جعبه به شکل مکعب مستطیل به ابعاد ۳۰ و ۵۰ و ۴۰ سانتی متر را با کاغذ کادو پوشانده ایم. برای پوشاندن این جعبه

حداقل چند سانتی متر مربع کاغذ کادو لازم داریم؟ چرا در این مسئله حداقل کاغذ لازم خواسته شده است؟

۸- با مکعب های به ضلع ۱ واحد حجم مقابل را ساخته ایم. اگر تمام سطح های این حجم را



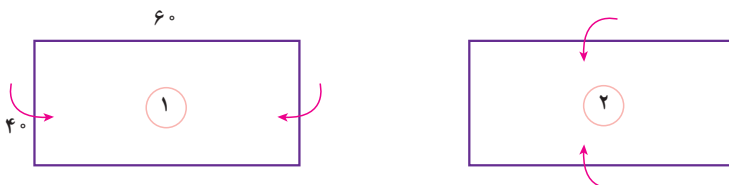
رنگ کنیم، چند مکعب رنگ نمی شوند؟

چند مکعب رنگ می شود؟

چند مکعب ۲ وجهشان رنگ می شود؟

چند مکعب ۳ وجهشان رنگ شده است؟

۱- یک مستطیل به طول و عرض داده شده را به دو صورت زیر لوله می کنیم تا استوانه به دست آید.



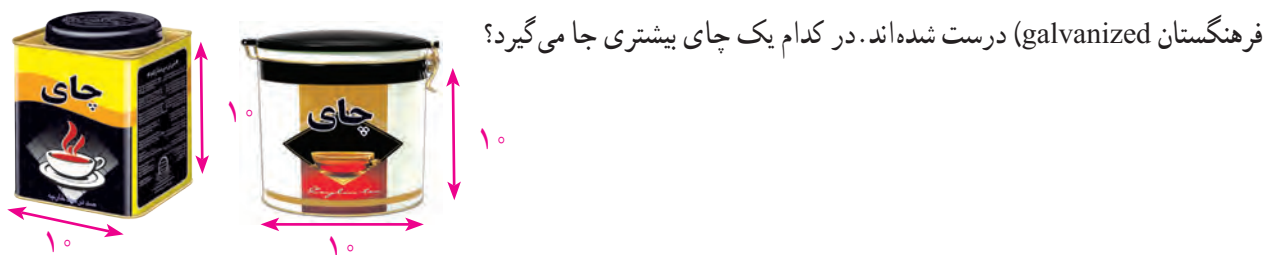
در هر حالت حجم استوانه را به دست آورید. مانند نمونه از رابطه های جبری کمک بگیرید. برای ساده تر شدن محاسبه ها عدد پی (π) را ۳ در نظر بگیرید. در هر حالت ابتدا شعاع قاعده و ارتفاع استوانه را تشخیص دهید.

$$V_1 = h_1 \times S_1 = h_1 \times r_1 \times r_1 \times \pi =$$

$$V_2 = h_2 \times S_2 =$$

با مقایسه حجم ها و با توجه به اینکه هر دو حجم با یک مستطیل ساخته شده است، چه نتیجه ای می گیرید؟

۲- یک کارخانه تولید چای دو نوع بسته بندی به شکل های زیر ارائه می کند. هر دو نوع قوطی با ورق روی اندود (مصوب



فرهنگستان galvanized) درست شده اند. در کدام یک چای بیشتری جا می گیرد؟

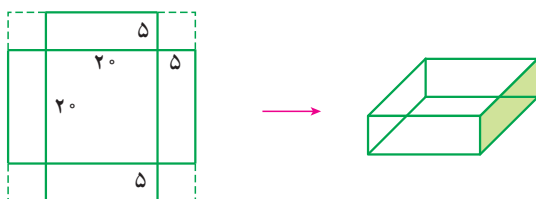
در کدام یک ورق روی اندود بیشتری برای ساخت قوطی به کار رفته است؟ در محاسبات خود عدد π را ۳ در نظر بگیرید.

باتوجه به عددهای بالا اگر شما مدیر کارخانه باشید، کدام نوع بسته بندی را انتخاب می کنید؟ چرا؟

کدام نوع بسته بندی در حمل و نقل بهتر است و جای کمتری می گیرد؟ چرا؟

برای بسته بندی شیرینی، جعبه هایی را درست می کنند. شکل گسترده این جعبه ها به صورت زیر است و پس از تا کردن مربع های

کوچک گوشه ها روی هم قرار می گیرند و جعبه درست می شود.

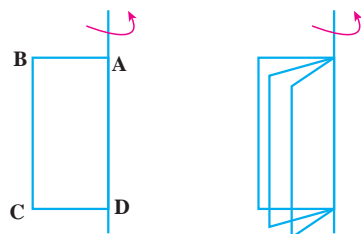


باتوجه به اندازه های داده شده، حجم (گنجایش) جعبه را پیدا کنید.

اگر به جای ۵ سانتی متر لبه ها را ۶ سانتی متر در نظر بگیریم، جعبه ای که با همین مقوا ساخته می شود، حجم بیشتری دارد یا کمتر؟

مستطیل ABCD را حول محوری که از AD می‌گذرد، دوران می‌دهیم. شکل زیر نشان می‌دهد که مستطیل‌ها چگونه حرکت

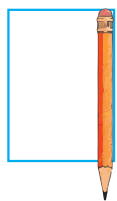
می‌کنند.



شما هم مانند شکل مقابل کاغذی را روی مدادی بچسبانید و آن را بچرخانید و حرکت مستطیل را تماشا کنید.

با چرخاندن این مستطیل چه حجمی به وجود می‌آید؟

مشخصات آن حجم را بنویسید.



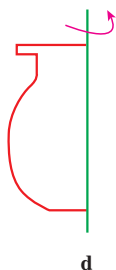
با حرکت یک سطح در فضا، حجم ساخته می‌شود. همین کار را برای شکل‌های دیگر نیز می‌توان انجام داد تا حجم‌های

دیگری ساخته شوند. در سال‌های بعد در این مورد بیشتر توضیح داده خواهد شد.

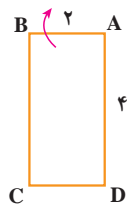
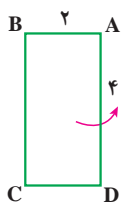
۱- سطحی مثل شکل مقابل را حول محور d دوران می‌دهیم.

حجم چه شکلی ساخته می‌شود؟ می‌توانید با یک فرفره و چرخاندن آن حجم ایجاد شده را ببینید.

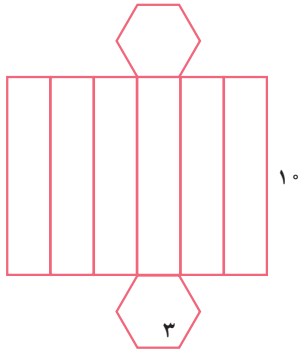
از این خاصیت در خراطی، تراشکاری و سفالگری برای ساختن حجم‌های مختلف استفاده می‌کنند.



۲- یک مستطیل را یک بار حول محور AD و یک بار حول محور AB دوران دهید. حجم حاصل از این دوران را حساب کنید.



- ۱- یک مقوا به طول و عرض، ۲۰×۵ را به شکل استوانه به ارتفاع ۵ در آورده ایم. یک مقوای دیگر را نیز به ابعاد ۱۰×۱۰ را به شکل یک استوانه در آورده ایم. با توجه به اینکه مساحت مقواها در دو حالت برابر است، کدام استوانه حجم بیشتری دارد؟
- ۲- با شکل مقابل یک منشور درست کرده ایم. مساحت جانبی آن را پیدا کنید.



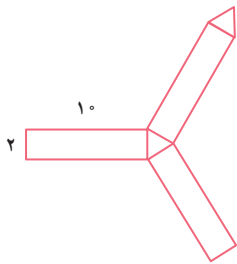
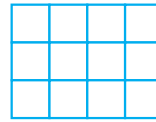
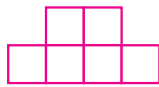
- ۳- یک صابون مکعب مستطیل شکل به حجم ۳۲ سانتی متر مکعب پس از چند بار مصرف، کوچک شده و به ابعاد $۲\frac{1}{۳}$ و ۴ و $۱\frac{1}{۳}$ سانتی متر تبدیل شده است. چند درصد این صابون استفاده شده است؟
- ۴- یک استوانه که با یک مقوا به طول ۲۰ سانتی متر و عرض ۱۰ سانتی متر ساخته شده به طور تقریبی چه حجمی دارد؟ (ارتفاع استوانه ۲۰ است.)

- ۵- اگر یک حجم از بالا و سمت راست و روبه‌رو به صورت زیر دیده شود، آن حجم را رسم کنید.

روبه‌رو

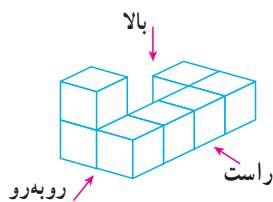
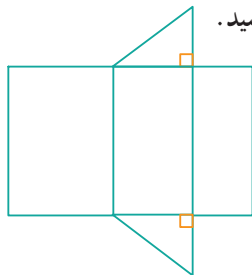
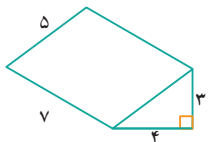
راست

بالا



- ۶- شکل مقابل گسترده یک منشور را نشان می‌دهد. مساحت جانبی منشور را پیدا کنید.

- ۷- با توجه به حجم منشور و ابعاد آن، اندازه ضلع‌های گسترده آن را بنویسید.



- ۸- حجم مقابل از راست، بالا و روبه‌رو چگونه دیده می‌شود؟

در این فصل واژه‌های زیر به کار رفته‌اند. مطمئن شوید که می‌توانید با جملات خود آنها را تعریف کنید. برای هر کدام مثال بزنید.

- حجم هندسی
- حجم منشوری
- مساحت جانبی
- مساحت کل
- گسترده

در این فصل روش‌های اصلی زیر مطرح شده‌اند. با یک مثال هر کدام را توضیح دهید و در دفتر خود یک خلاصه تهیه کنید.

- انواع حجم‌های هندسی
- قاعده، وجه، یال و رأس حجم‌های منشوری
- رابطه پیدا کردن حجم‌های منشوری
- رابطه پیدا کردن مساحت کل حجم‌های منشوری
- دوران سطح حول یک محور و ساختن حجم
- مقایسه حجم‌هایی که با یک سطح مشخص درست شده‌اند.
- حجم مخروطی و حجم منشوری
- مقطع زدن یک حجم منشوری
- رابطه پیدا کردن مساحت جانبی حجم‌های هندسی
- ساختن یک حجم به کمک گسترده آن

کاربرد

کاربرد این فصل در زندگی روزمره فراوان است. در دنیایی از اجسام زندگی می‌کنیم و نیاز داریم حجم‌های مختلف را اندازه بگیریم و برای ساختن حجم‌ها نیز از سطح‌ها (کاغذ، مقوا، ورق و ...) استفاده می‌کنیم.

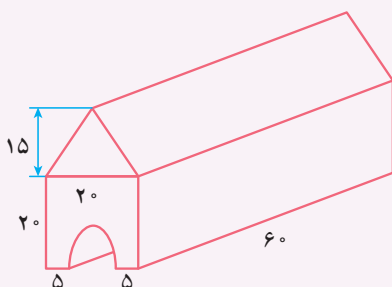
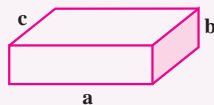
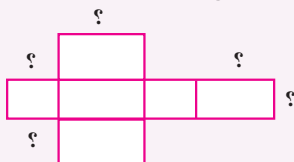
تمرین‌های ترکیبی

در صورتی که تمرین‌های ترکیبی زیر را توانستید انجام دهید، مطمئن می‌شوید که این فصل را به خوبی آموخته‌اید.

۱- حجم، مساحت جانبی و مساحت کل شکل‌های زیر را به دست آورید.

استوانه به شعاع قاعده ۲ و ارتفاع ۲ منشور چهار پهلو با قاعده مربع به ضلع ۲ و ارتفاع ۲۰

۲- الف) با توجه به شکل مکعب مستطیل اندازه ضلع‌های خواسته شده روی گسترده آن را مشخص کنید.



ب) حجم شکل مقابل را به دست آورید.