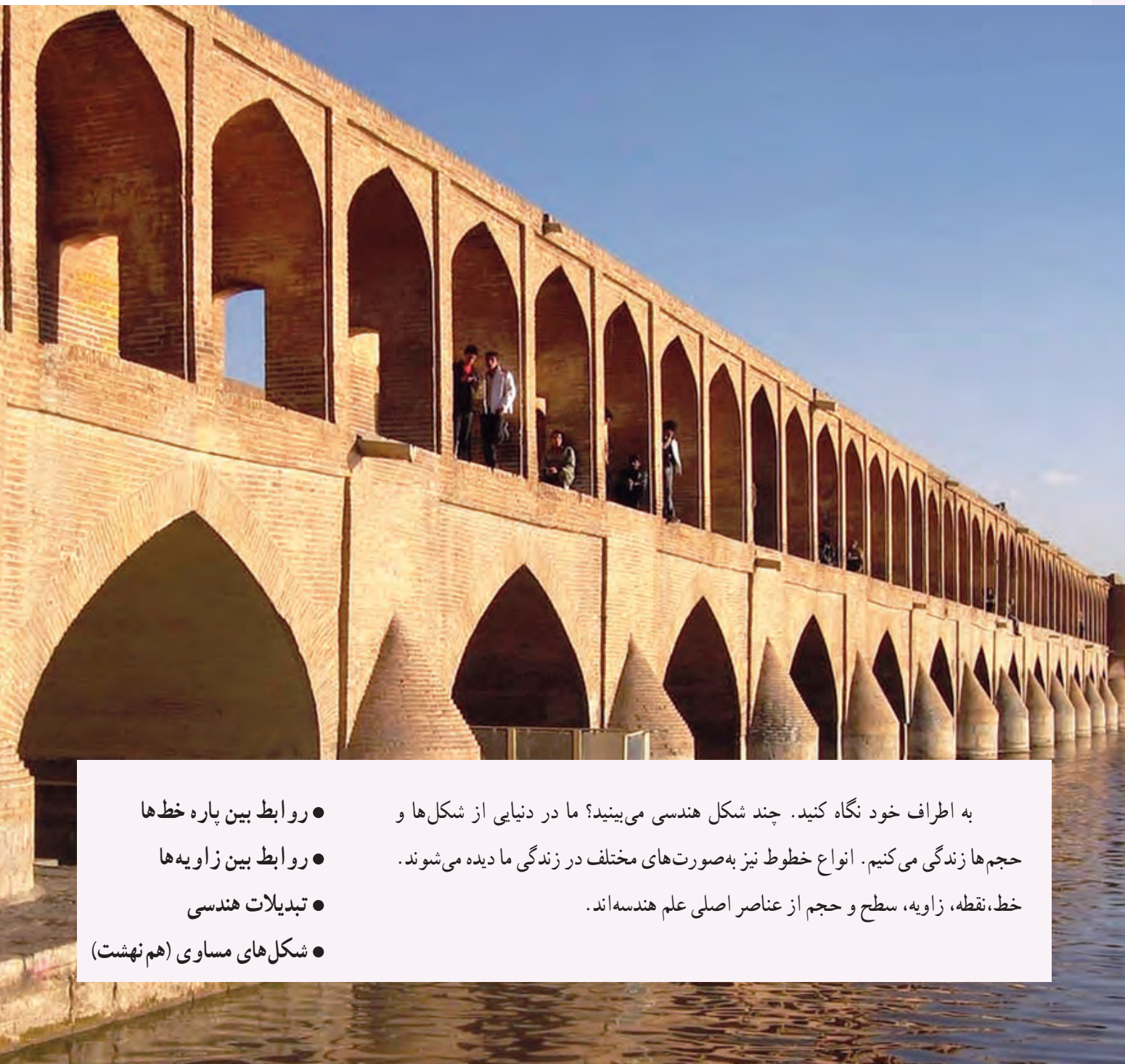




فصل ۴ هندسه و استدلال



- روابط بین پاره خط‌ها
 - روابط بین زاویه‌ها
 - تبدیلات هندسی
 - شکل‌های مساوی (هم‌نهشت)
- به اطراف خود نگاه کنید. چند شکل هندسی می‌بینید؟ ما در دنیایی از شکل‌ها و حجم‌ها زندگی می‌کنیم. انواع خطوط نیز به صورت‌های مختلف در زندگی ما دیده می‌شوند. خط، نقطه، زاویه، سطح و حجم از عناصر اصلی علم هندسه‌اند.

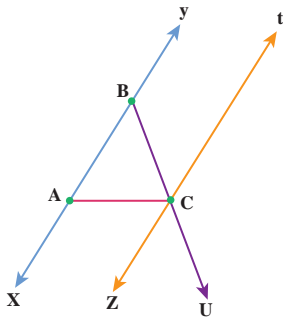
روابط بین پاره خط‌ها

در ریاضیات برای نام گذاری شکل‌ها از حروف انگلیسی استفاده می‌کنیم. به طور معمول نقطه را با حروف بزرگ انگلیسی نام گذاری می‌کنیم و برای نام گذاری امتداد خط که در شکل با پیکانه نشان می‌دهیم از حروف کوچک استفاده می‌کنیم. طول یک پاره خط را با قراردادن یک پاره خط کوچک در بالای نام آن نمایش می‌دهیم. برای مثال \overline{AB} یعنی طول پاره خط AB

۱- مانند نمونه‌ها شکل را با حروف انگلیسی نام گذاری کنید.



۲- در شکل زیر نام خط‌ها، نیم خط‌ها و پاره خط‌ها را بنویسید و در صورت لزوم از راهبرد الگوسازی استفاده کنید.

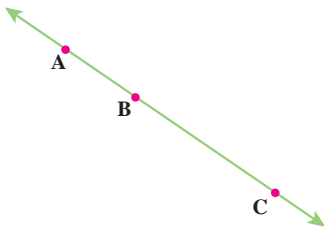


خط :

نیم خط :

پاره خط :

۳- در شکل مقابل نقاط A, B, C روی یک خط قرار دارند.



رابطه‌های زیر را کامل کنید.

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\overline{AC} - \underline{\hspace{2cm}} = \overline{AB}$$

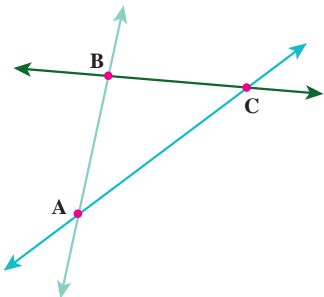
$$\overline{AC} - \overline{AB} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\overline{CB} + \overline{BA} = \underline{\hspace{2cm}}$$

۴- در شکل زیر نقاط A, B, C روی یک خط قرار ندارند.

نقاط A, B, C یک مثلث تشکیل داده‌اند. این مثلث ABC نام دارد و آنرا به صورت $\triangle ABC$ یا $\triangle ABC$ نمایش می‌دهیم.

رابطه‌های زیر را کامل کنید.



$$\overline{AB} + \overline{BC} > \underline{\hspace{2cm}}$$

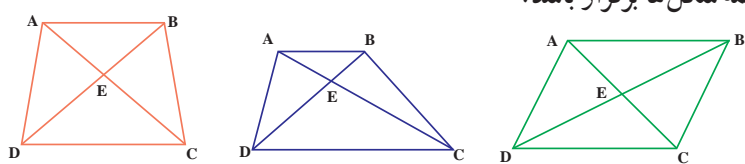
$$\overline{AB} + \overline{AC} > \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}} > \overline{AB}$$

یک مثلث دلخواه دیگر رسم کنید و آنرا ABC بنامید.

آیا همین رابطه‌ها در آن مثلث هم برقرار است؟

۱- مانند نمونه رابطه‌های دیگری را بنویسید که در همهٔ شکل‌ها برقرار باشد.

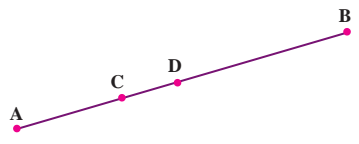


$$\overline{AB} + \overline{AD} > \overline{BD}$$

$$\overline{BD} - \overline{DE} = \overline{BE}$$

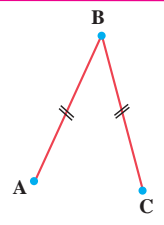
۲- می‌دانیم $\overline{AB} = 7\text{cm}$ ، $\overline{AC} = 2\text{cm}$ و $\overline{DB} = 4\text{cm}$ (cm مخفف سانتی متر است).

یک رابطهٔ جبری بنویسید و با جایگزین کردن عددها، طول پاره خط CD را به دست آورید.



۱- پاره خط‌های مساوی را به صورت روبه‌رو در شکل مشخص می‌کنیم.

علامت‌ها نشان می‌دهند که: $\overline{AB} = \overline{AC}$

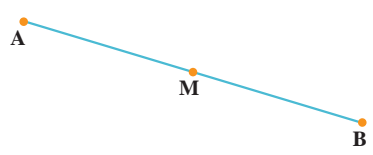


در شکل مقابل M وسط پاره خط AB است.

اندازهٔ کدام دو پاره خط با هم مساوی‌اند؟ $\text{---} = \text{---}$

تساوی این دو پاره خط را با علامت‌گذاری روی شکل نشان دهید. تساوی‌های زیر را با نوشتن عدد مناسب کامل کنید.

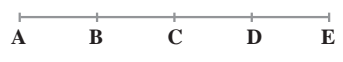
$$\overline{AB} = \text{---} \overline{AM} \qquad \overline{AM} = \text{---} \overline{AB}$$



۲- در شکل زیر پاره خط‌های AB، BC، CD و DE با هم مساوی‌اند. طول کدام پاره خط‌ها برابر $3\overline{AB}$ است؟

طول کدام پاره خط‌ها برابر $2\overline{AB}$ است؟

چند پاره خط در شکل روبه‌رو دیده می‌شود؟

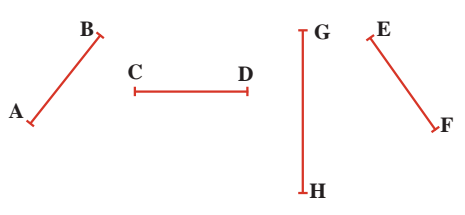


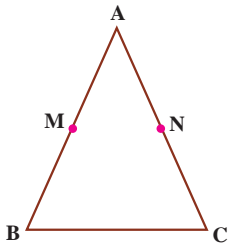
۳- با توجه به پاره خط‌هایی که در شکل زیر می‌بینید، اگر بدانیم $\overline{AB} = \overline{DC}$ و $\overline{DC} = \overline{EF}$ و $\overline{EF} < \overline{GH}$ ، رابطه‌های زیر را کامل کنید.

(این علامت \Rightarrow یعنی نتیجه می‌گیریم):

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{DC} \\ \overline{DC} = \overline{EF} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{---} = \text{---}$$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{EF} \\ \overline{EF} < \overline{GH} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{---} < \text{---}$$





۴- مثلث ABC متساوی الساقین است؛ یعنی: $\overline{AB} = \overline{AC}$
 نقطه M وسط AB و نقطه N وسط AC است.
 چرا $\overline{AN} = \overline{AM}$ ؟

$$\overline{AB} = \overline{AC} \Rightarrow \frac{1}{2}\overline{AB} = \text{---} \Rightarrow \text{---} = \text{---}$$

۱- اگر پاره خط‌های AB، BC، CD، DE با هم برابر باشند، تساوی‌ها را با نوشتن عدد مناسب کامل کنید.



$$\overline{AC} = \text{---} \overline{AB} \quad \overline{CE} = \text{---} \overline{AE}$$

$$\overline{AE} = \text{---} \overline{BE} \quad \overline{BC} = \text{---} \overline{BC}$$

۲- در شکل مقابل نقاط A، B، C و D روی یک خط قرار گرفته‌اند.



می‌دانیم: $\overline{AB} = \overline{CD}$

کدام پاره خط هم اندازه AC است؟ چرا؟

۱- با رسم شکل‌های مناسب به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

الف) از یک نقطه چند خط می‌گذرد؟

ب) از یک نقطه چند خط راست می‌گذرد؟

ج) از دو نقطه چند خط از (انواع مختلف) می‌گذرد؟

د) از دو نقطه چند خط راست می‌گذرد؟

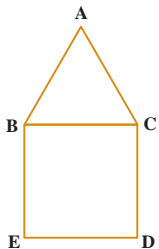
۲- یک خط رسم کنید و نقاط A، B، C و D را طوری روی آن نام‌گذاری کنید که رابطه زیر درست باشد.

$$\overline{BD} - \overline{AD} = \overline{BC} + \overline{AC}$$

۳- اگر روی یک خط راست ۱۰ نقطه بگذارید، چند نیم خط به وجود می‌آید که سر آن‌ها روی این نقاط باشد؟ چرا؟

۴- نقطه C وسط پاره خط AB، نقطه D وسط پاره خط AC و نقطه E وسط پاره خط AD است.

\overline{AB} چند برابر \overline{AE} است؟

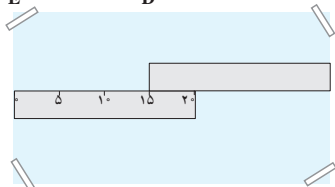


۵- در شکل روبه‌رو یک مربع و یک مثلث متساوی‌الاضلاع دیده می‌شود.

چرا $\overline{BE} = \overline{AC}$ ؟

۶- دو خط کش ۲ سانتی متری را مانند شکل روبه‌رو، روی یک صفحه کاغذ قرار داده‌ایم.

طول این صفحه چند سانتی متر است؟



۷- اندازه قد علی را با a، اندازه قد حسن را با b و اندازه قد حسین را با c نشان می‌دهیم.

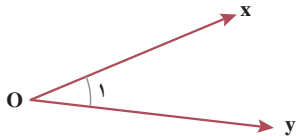
$$\left. \begin{array}{l} a > b \\ b = c \end{array} \right\} \Rightarrow$$

رابطه زیر را کامل کنید و نتیجه را به فارسی بنویسید.

روابط بین زاویه‌ها

زاویهٔ مقابل نام‌گذاری شده و به چند صورت خوانده می‌شود. چرا از حروف کوچک و بزرگ

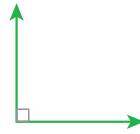
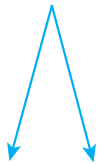
استفاده شده است؟



$$\hat{xOy} = \hat{yOx} = \hat{O} = \hat{O}_1 = \hat{1}$$

۱- با انواع زاویه‌ها در سال گذشته آشنا شده‌اید، زاویه‌ها را نام‌گذاری کنید و نوع هر کدام را مشخص کنید.

فعالیت



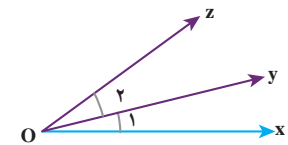
۲- تساوی بین زاویه‌ها را کامل کنید.

$$\hat{xOy} + \text{---} = \hat{xOz}$$

$$\hat{O}_2 + \hat{O}_1 = \text{---}$$

$$\hat{xOz} - \text{---} = \hat{zOy}$$

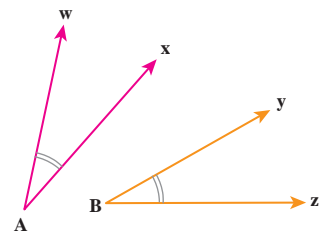
$$\hat{xOz} - \hat{O}_1 = \text{---}$$



۳- دو زاویهٔ مساوی را به صورت روبه‌رو در شکل مشخص می‌کنیم:

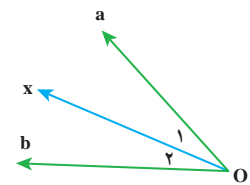
$$\hat{wAx} = \text{---}$$

علامت‌ها نشان می‌دهند که:



۴- در شکل مقابل Ox نیمساز زاویهٔ aOb است. زاویهٔ \hat{O}_1 با کدام زاویه مساوی است؟

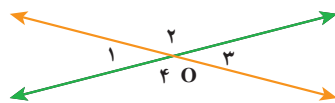
تساوی این دو زاویه را با علامت‌گذاری روی شکل نشان دهید.



۵- در شکل مقابل دو خط یکدیگر را در نقطهٔ O قطع کرده‌اند.

$$\left. \begin{aligned} \hat{O}_1 + \hat{O}_2 &= \text{---} \\ \hat{O}_3 + \hat{O}_2 &= \text{---} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{---} = \text{---}$$

می‌دانیم $\hat{O}_1 = 70^\circ$ است. اندازهٔ زاویه‌های دیگر را با نوشتن یک تساوی پیدا کنید.



$$\hat{O}_2 = 118^\circ - \text{---} = \hat{O}_4$$

$$\hat{O}_3 = \text{---} = \text{---}$$

کار در کلاس

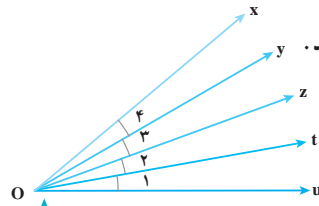
۱- زاویه‌های $\hat{O}_1, \hat{O}_2, \hat{O}_3, \hat{O}_4$ همه با هم برابرند. جاهای خالی را با عدد مناسب کامل کنید.

$$\hat{xOu} = \text{---} \hat{O}_1$$

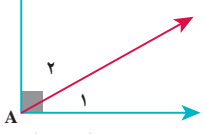
$$\hat{xOt} = \text{---} \hat{tOx}$$

$$\hat{yOt} = \text{---} \hat{O}_2$$

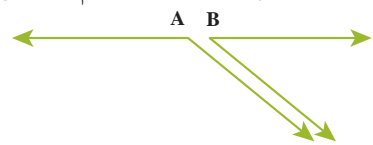
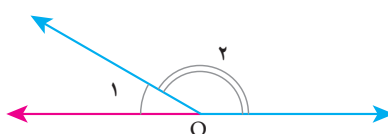
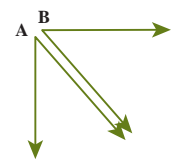
$$\hat{O}_2 = \text{---} \hat{zOu}$$



۲- برای زاویه‌های متمم و مکمل تساوی بنویسید.



$$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 90^\circ$$



- ۱- می‌دانیم در هر مثلث، مجموع زاویه‌ها برابر 180° است. مثلث‌ها را با توجه به اندازه زاویه‌هایشان به سه دسته تقسیم می‌کنیم:
- مثلث‌هایی که هر سه زاویه آنها تند است.
 - مثلث‌هایی که یک زاویه راست دارند.
 - مثلث‌هایی که یک زاویه باز دارند.
- چرا مثلث نمی‌تواند دو زاویه راست داشته باشد؟

	متساوی‌الاضلاع	متساوی‌الساقین	با ضلع‌های نامساوی
همه زاویه‌ها تند			
یک زاویه راست			
یک زاویه باز			

- ۲- می‌خواهیم در هر قسمت جدول مقابل یک مثلث رسم کنیم. در کدام قسمت‌ها نمی‌توانیم مثلی رسم کنیم؟ در قسمت‌هایی که می‌توانیم مثلث رسم کنیم، یک مثلث بکشید.

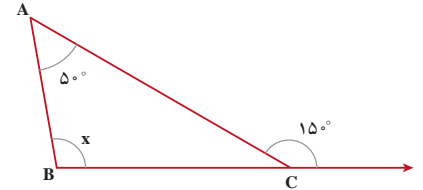
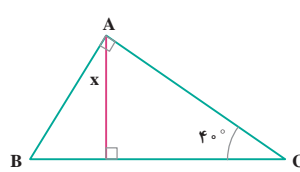
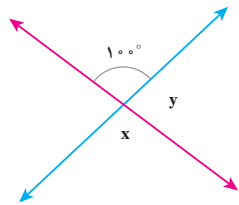
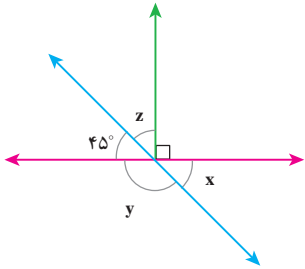
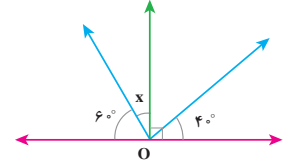
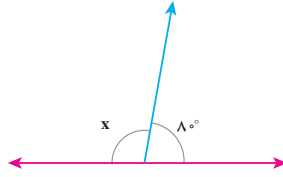
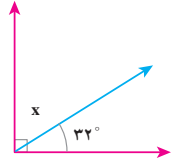
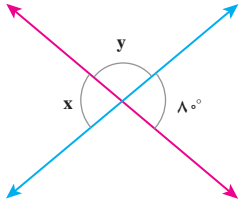
- ۳- هر یک از شکل‌های زیر یک چندضلعی اند. چندضلعی‌هایی که هیچ زاویه بزرگ‌تر از 180° ندارند، محدب نامیده می‌شوند. به چند ضلعی‌ای که دست کم یک زاویه بزرگ‌تر از 180° داشته باشد، چندضلعی مقعر می‌گویند. چندضلعی‌های مقعر (کاو) و محدب (کوژ) را در شکل زیر مشخص کنید.



- ۴- به چندضلعی‌هایی که همه ضلع‌ها و زاویه‌هایشان با هم مساوی است، چندضلعی منتظم گفته می‌شود. کدام شکل در فعالیت قبل چندضلعی منتظم بود؟

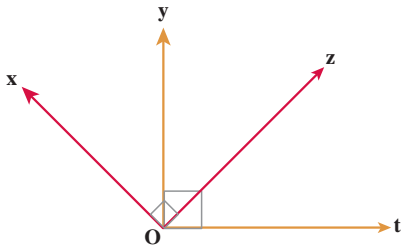
۱- یک مثال برای هر یک از زمان‌هایی بنویسید که عقربه بین ساعت‌شمار و دقیقه‌شمار زاویه راست، باز، تند و نیم‌صفحه را نشان دهد.

۲- اندازه زاویه‌های x و y را در شکل‌های زیر پیدا کنید.



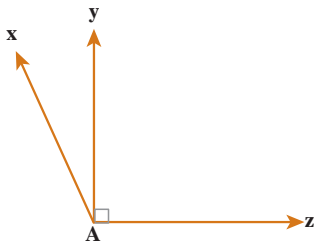
۳- در شکل مقابل می‌دانیم زاویه‌های \hat{xOz} ، \hat{tOy} ، 90° هستند.

چگونه می‌توانید نتیجه بگیرید که: $\hat{xOy} = \hat{tOz}$ ؟

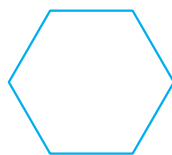


۴- در شکل مقابل اندازه زاویه \hat{xAz} برابر 12° درجه است.

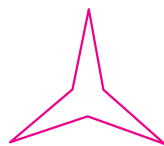
زاویه \hat{xAy} چه کسری از \hat{xAz} است؟



۵- شکل‌های زیر چه شباهت‌هایی با هم دارند؟ چه تفاوت‌هایی با هم دارند؟



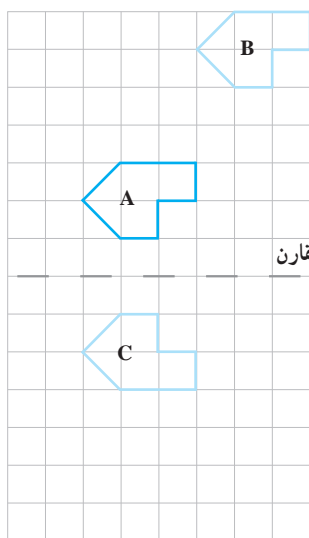
(ج)



(ب)



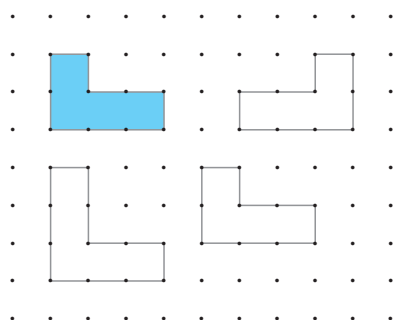
(الف)



۱- یک کاغذ شفاف روی شکل A قرار دهید و این شکل را روی کاغذتان بکشید. کاغذ شفاف را بدون تغییر جهت روی صفحه حرکت دهید تا تصویر آن روی شکل B قرار بگیرد.

بدین ترتیب تصویر شکل A را روی صفحه انتقال داده‌اید.

۲- دوباره کاغذ پوستی خود را طوری روی صفحه قرار دهید که تصویری که کشیده‌اید، روی شکل A قرار بگیرد. کاغذتان را از روی خط تقارن تا کنید. بدین ترتیب تصویر شکل A روی کدام شکل قرار می‌گیرد؟ این شکل قرینه شکل A نسبت به خط تقارن است. قرینه شکل B را هم نسبت به خط تقارن رسم کنید و آن را D بنامید.

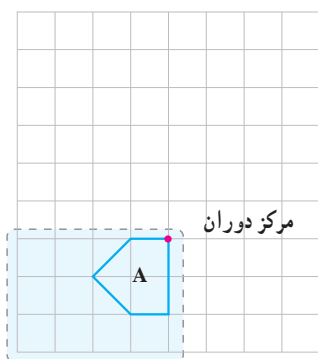


۱- به اندازه و جهت شکل‌های سفید نگاه کنید. کدام یک از شکل‌ها، انتقال یافته شکل آبی است؟ این شکل را هاشور بزنید.

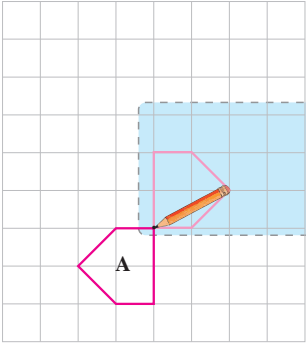
۲- کدام شکل قرینه شکل آبی است؟ خط تقارن متناسب با این تقارن را رسم کنید.

وقتی شکلی را روی صفحه انتقال می‌دهیم، تصویر به دست آمده مساوی و هم جهت شکل اولیه است. وقتی قرینه شکلی را نسبت به یک خط پیدا می‌کنیم، تصویر به دست آمده مساوی آن شکل است؛ اما جهت آن تغییر می‌کند.

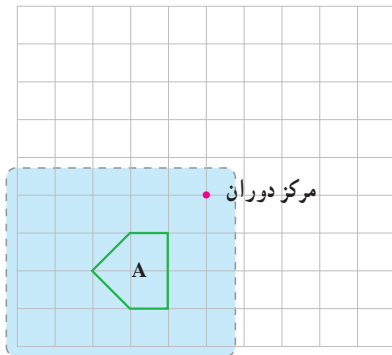
۱- یک کاغذ پوستی روی شکل A قرار دهید و این شکل را روی آن بکشید. با استفاده از یک مداد کاغذ پوستی خود را در مرکز دوران شکل، روی صفحه کتاب ثابت کنید و آرام کاغذ را روی کتاب بچرخانید و به حرکت تصویر در صفحه نگاه کنید.



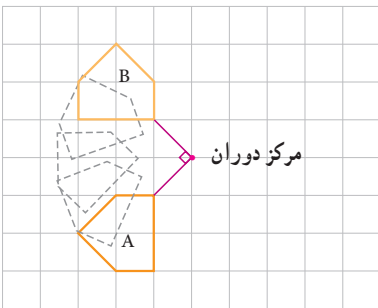
۲- اگر کاغذ پوستی را 18° درجه بچرخانید، تصویر شکل A مانند شکل روبه‌رو در صفحه قرار می‌گیرد. این تصویر حاصل دوران 18° درجه‌ای شکل A حول مرکز دوران است.



۳- باز هم کاغذ پوستی را روی شکل قرار دهید و با استفاده از آن تصویر حاصل از دوران 18° درجه‌ی شکل A حول مرکز دوران جدید را بسازید.



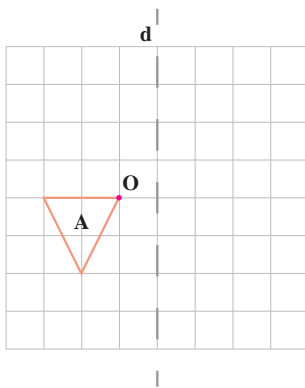
۴- با کمک کاغذ پوستی شکل A را حول مرکز دوران 9° درجه در جهت عقربه‌های ساعت چرخانده‌ایم. تصویر شکل A روی شکل B قرار گرفته است. شکل B را حول مرکز دوران، 9° درجه در جهت عقربه‌های ساعت بچرخانید. شکل حاصل از این دوران را رسم کنید و آن را C بنامید. چرا در دوران 9° درجه لازم است جهت دوران را مشخص کنیم؛ اما در دوران 18° درجه این کار لازم نیست؟



۱- الف) شکل A را 9° حول نقطه O در جهت عقربه‌های ساعت بچرخانید و شکل حاصل را B بنامید.

ب) قرینه A را نسبت به خط d رسم کنید و آن را C بنامید.

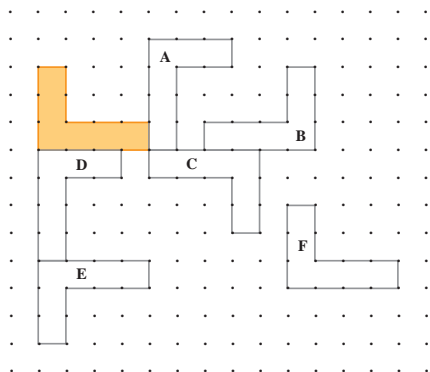
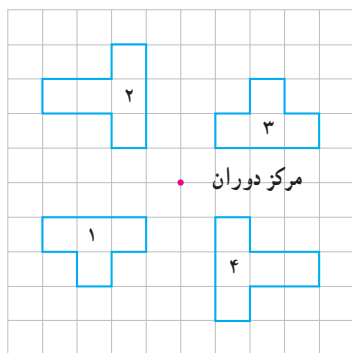
ج) آیا هر سه شکل با هم مساوی‌اند؟



۲- الف) کدام شکل از دوران 180° درجه شکل ① در جهت عقربه‌های ساعت

حول مرکز دوران به دست آمده است؟

ب) کدام شکل از دوران 180° درجه شکل ④ حول مرکز دوران به دست آمده است؟



۳- همه شکل‌های مقابل با هم مساوی اند.

الف) کدام شکل‌ها انتقال یافته شکل رنگی هستند؟

ب) کدام شکل‌ها دوران یافته شکل رنگی هستند؟

ج) کدام شکل‌ها قرینه شکل رنگی نسبت به یک خط هستند؟

۴- در هر مورد چه تبدیلی انجام شده است؟ انتقال، تقارن محوری یا دوران؟

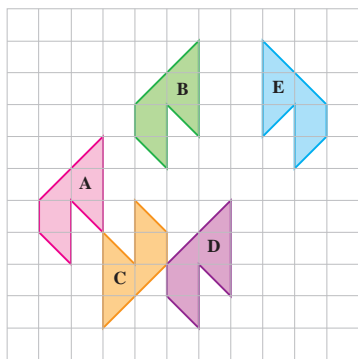
الف) A به B تبدیل شده است.

ب) A به C تبدیل شده است.

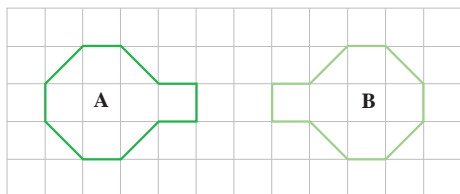
ج) B به E تبدیل شده است.

د) D به A تبدیل شده است.

ه) D به C تبدیل شده است.



۵- در هر مورد با دو تبدیل مختلف می‌توان A را بر B منطبق کرد. این دو تبدیل را نام ببرید.



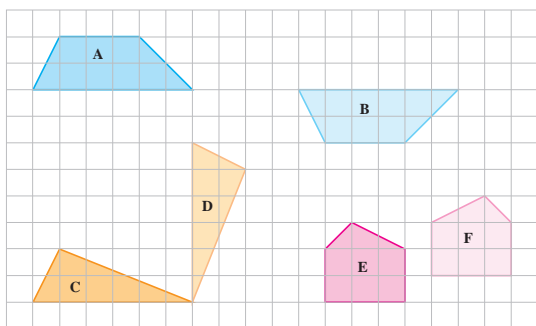
(ب)

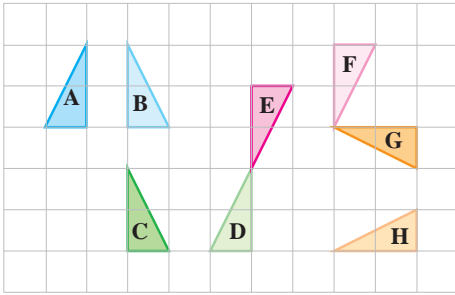


(الف)

۶- در شکل مقابل کدام دو شکل مساوی، یک شکل و تبدیل یافته آن

تنها با یک تبدیل (انتقال، تقارن یا دوران) را نشان می‌دهد؟





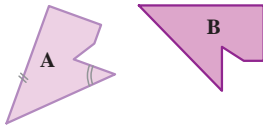
۱- الف) هر شکل با یک تبدیل، به شکل بعدی تبدیل شده است. روی هر پیکانه نوع تبدیل انجام شده (انتقال، تقارن یا دوران) را بنویسید.

تقارن
A → B → C → D → E → F → G → H

ب) آیا شکل A با شکل H مساوی است؟ چرا؟

۲- اگر بتوانیم شکلی را با یک یا چند تبدیل (انتقال، تقارن یا دوران) در صفحه بر شکل دیگر منطبق کنیم، می‌گوییم این دو شکل

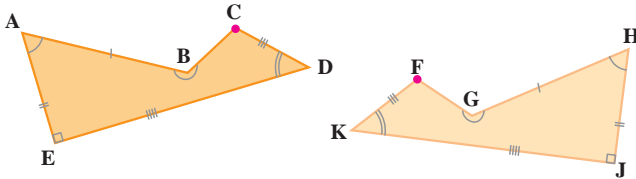
باهم هم نهشت (مساوی) اند.



دو شکل مقابل با هم هم نهشت اند.

یک ضلع و یک زاویه از شکل A مشخص شده است.

ضلع و زاویه مساوی (متناظر) با آنها در شکل B را با علامت گذاری مشخص کنید.



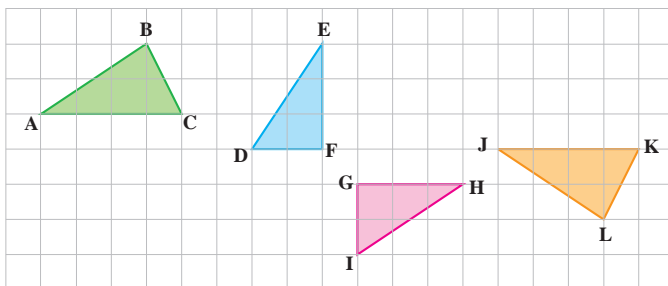
۳- دو شکل مقابل هم نهشت اند. این عبارت را در ریاضی

به صورت $ABCDE \cong HGFKJ$ نمایش می‌دهیم.

در دو شکل هندسی هم نهشت، اجزای متناظر دو به دو با

هم برابرند.

به چگونگی نمایش برابری ضلع‌ها و زاویه‌ها در دو شکل بالا توجه کنید.



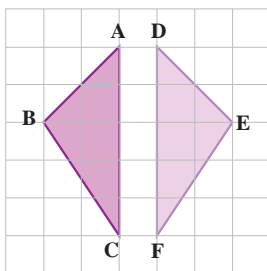
۱- مثلث‌های هم نهشت را در شکل بیابید

و به زبان ریاضی بنویسید.

۲- در شکل مقابل دو مثلث هم نهشت دیده می‌شود.

ضلع‌ها و زاویه‌های مساوی دو شکل را با علامت گذاری مشخص کنید. تساوی اجزای

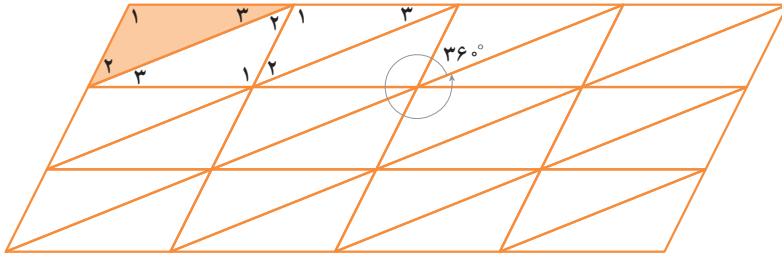
متناظر این دو مثلث را کامل کنید.



$\hat{A} =$ $\overline{AB} =$
 $\hat{B} =$ $=$
 $\hat{C} =$ $=$

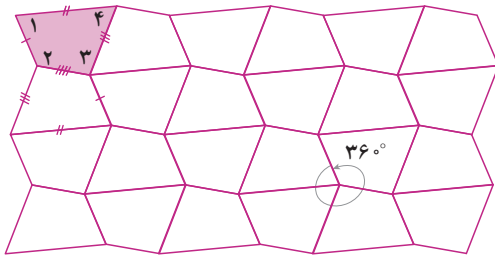
۱- با انجام تبدیلات متوالی روی یک مثلث، قسمتی از صفحه را پوشانده‌ایم. مثلث‌هایی را که از انتقال مثلث رنگی به دست آمده‌اند، رنگ کنید.

هریک از مثلث‌های سفید را می‌توان با دوران 18° درجه یکی از مثلث‌های رنگی به دست آورد. زاویه‌های مساوی در همه مثلث‌ها را با شماره‌گذاری آنها مشخص کنید. آیا همه این مثلث‌ها با هم مساویند؟

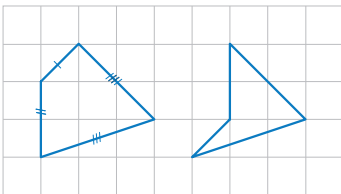


۲- با انجام تبدیلات متوالی روی یک چهارضلعی قسمتی از صفحه را پوشانده‌ایم. چهارضلعی‌هایی را که از انتقال چهارضلعی رنگی به دست آمده‌اند، رنگ کنید. با چه تبدیلی می‌توان چهارضلعی‌های سفید را به دست آورد؟

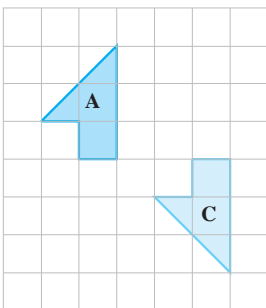
ضلع‌ها و زاویه‌های مساوی را با علامت‌گذاری مشخص کنید. آیا همه این چهارضلعی‌ها با هم مساوی‌اند؟



۱- در شکل مقابل ضلع‌های دو چهارضلعی، دو به دو با هم برابرند. الف) با علامت‌گذاری مناسب تساوی ضلع‌ها را نمایش دهید. ب) آیا این دو چهارضلعی با هم مساوی‌اند؟

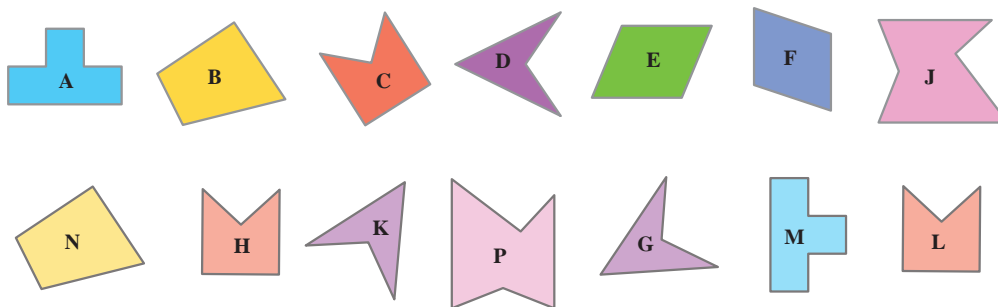


۲- می‌خواهیم شکل B را طوری رسم کنیم که بتوانیم با دو تبدیل متوالی، شکل A را بر شکل C منطبق کنیم. شکل B را رسم کنید و روی هر پیکانه نوع تبدیل انجام شده را بنویسید.



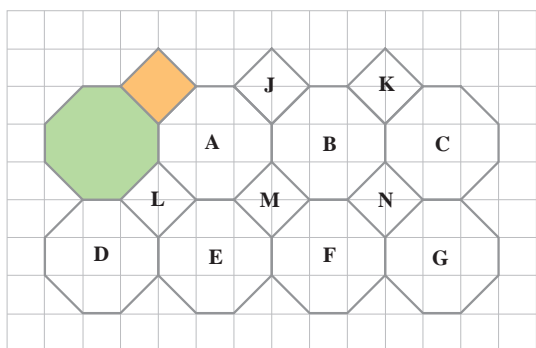
A → B → C

۳- به کمک کاغذ پوستی شکل‌های مساوی را پیدا کنید و تساوی شکل‌ها را به زبان ریاضی بنویسید.



۴- با انجام تبدیلات متوالی روی یک هشت‌ضلعی و مربع، قسمتی از صفحه را پر کرده‌ایم.

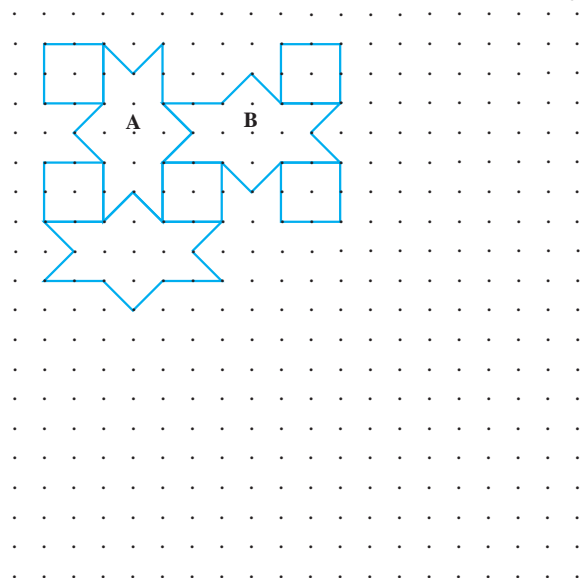
به چند طریق می‌توان تنها با یک تبدیل هشت‌ضلعی رنگی را بر شکل C منطبق کرد؟



۵- شکل زیر قسمتی از کاشی‌کاری یک بنای قدیمی را نشان می‌دهد.

الف) چگونه می‌توان با دو تبدیل متوالی A را بر شکل B منطبق کرد؟

ب) با ادامه الگوی ایجادشده، صفحه را پر کنید.



در این فصل واژه‌های زیر به کار رفته‌اند. مطمئن شوید که می‌توانید با جملات خود آنها را تعریف کنید. برای هر کدام مثال بزنید.

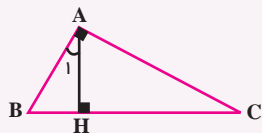
● تبدیل‌های هندسی ● شکل‌های هم‌نهشت ● اجزای متناظر

در این فصل روش‌های اصلی زیر مطرح شده‌اند. با یک مثال هر کدام را توضیح دهید و در دفتر خود یک خلاصه درس تهیه کنید.

- نام‌گذاری پاره‌خط، نیم‌خط و خط
- نوشتن رابطه بین پاره‌خط‌ها
- نتیجه‌گیری از چند تساوی درست
- انتقال یک شکل
- پیدا کردن دوران یافته یک شکل
- نام‌گذاری زاویه
- نوشتن رابطه بین زاویه‌ها
- دلیل تساوی دو زاویه متقابل به رأس
- پیدا کردن قرینه یک شکل
- نوشتن تساوی اجزاء متناظر دو شکل

کاربرد این درس را در فصل هفتم (بردار) خواهید دید. ضمن آنکه در کشیدن شکل‌های هندسی، گرافیک رایانه‌ای، طراحی و ... نیز کاربرد دارد.

در صورتی که تمرین‌های ترکیبی زیر را بتوانید انجام دهید، مطمئن می‌شوید که این فصل را به خوبی آموخته‌اید.



۱- چرا $\hat{C} = \hat{A}_1$ است؟

۲- قرینه شکل مقابل را نسبت به پاره‌خط BC پیدا کنید.

دوران یافته شکل جدید را نسبت به نقطه C با دوران 90° در جهت حرکت عقربه‌های ساعت پیدا کنید. اجزاء متناظر شکل اول و آخر را با علامت‌گذاری مشخص کنید.

