گروه آموزشی کلاسویچ

Classwich.ir

جزوه آموزشی فوق العاده

از مبحث ترکیبیات (شمارش)

شامل درسنامه کامل با مثال

فصل سوم گسسته دوازدهم

تهیه کننده : عرفان خیامی

درس اوّل : مربع های لاتین

مقدمه

فرض کنید که سه دبیر به نام های احمدی، کریمی و عباسی قصد دارند، در یک روز و در سه جلسه‌ی (اوّل، دوّم و سوّم) در سه کلاس A و B و C تدریس کنند. هر کلاس سه جلسه‌ی درسی دارد و هر دبیر در هر یک از کلاس ها دقیقاً یک بار باید تدریس کند. به نظر شما چگونه برنامه ریزی شود که این شرایط محقق گردد؟ حتماً جدولی مانند جدول زیر پیشنهاد می کنید و برنامه را مطابق جدول زیر اعلام می کنید.

جلسات / کلاس ها	جلسه‌ی اوّل	جلسه‌ی دوّم	جلسه‌ی سوّم
A	احمدی	کریمی	عباسی
B	عباسی	احمدی	کریمی
C	کریمی	عباسی	احمدی

البته واضح است که می توان جدول فوق را به شکل دیگری نیز تکمیل کرد.

اکنون اگر به جای نام سه دبیر مذکور به ترتیب اعداد ۱ و ۲ و ۳ قرار دهیم و یک جدول ۳ × ۳ تشکیل دهیم. خواهیم داشت.

جلسات / کلاس ها	جلسه‌ی اوّل	جلسه‌ی دوّم	جلسه‌ی سوّم
A	۱	۲	۳
B	۳	۱	۲
C	۲	۳	۱

با توجه به دو جدول فوق موارد معادل در دو ستون چپ و راست را به هم وصل کنید.

الف : در هیچ سطری عدد تکراری نداریم.	A: هیچ دبیری در یک جلسه موظف بـه تـدریس در دو کلاس نشده است.
ب : در هیچ ستونی عدد تکراری نداریم.	B: هر یک از دبیران در تمام کلاسها تدریس داشته اند.
ج : هر یک از اعداد در تمـام سـطرها آمـده است.	C: هیچ دبیری در یک کـلاس دو بـار تـدریس نکـرده است.
د : هر یک از اعداد در تمام ستون هـا آمـده است.	D: هر یک از دبیران در هر یک از جلـسه هـا تـدریس داشته است.

به نظر شما این پاسخ درست است؟ به رنگ ها توجه کنید.

الف : در هیچ سطری عدد تکراری نداریم.	A: هیچ دبیری در یک جلسه موظف به تدریس در دو کلاس نشده است.
ب : در هیچ ستونی عدد تکراری نداریم.	B: هر یک از دبیران در تمام کلاسها تدریس داشته اند.
ج : هر یک از اعداد در تمام سطرها آمده است.	C: هیچ دبیری در یک کلاس دو بار تدریس نکرده است.
د : هر یک از اعداد در تمام ستون ها آمده است.	D: هر یک از دبیران در هر یک از جلسه ها تدریس داشته است.

لذا شایسته است. جدول اخیر را به شکل زیر نمایش دهیم.

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

این مربع شرایط مورد نظر ، در ابتدای مطلب را محقق می سازد. چنین مربع هایی را مربع لاتین می نامند.

این قبیل مسائل، به کمک مفهومی موسوم به **مربع های لاتین** قابل حل است. در این درس می خواهیم با این مفهوم و کاربرد هایی از آن بیشتر آشنا شویم.

***

مربع لاتین

یک جدول مربعی از اعداد ۱ و ۲ و ۳ و ... و n به شکل یک مربع $n\times n$ را که سطرها و ستون های آن با اعداد ۱ و ۲ و ۳ و ... و n پر شده است و در هیچ سطر آن و نیز در هیچ ستون آن عدد تکراری وجود نداشته باشد، را **مربع لاتین** از مرتبه‌ی n می نامند و هر یک از اعداد درون مربع را یک **درایه** می گویند.

هر مربع لاتین در صورت لزوم با یک حرف بزرگ لاتین نام گذاری می شود.

مثال ۱) دو مربع لاتین ۳×۳ و دو مربع لاتین ۴×۴ در زیر نمایش داده شده است.

(الف)

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

(ب)

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

(ج)

۱	۴	۳	۲
۴	۱	۲	۳
۳	۲	۱	۴
۲	۳	۴	۱

(د)

۱	۴	۳	۲
۳	۲	۱	۴
۲	۳	۴	۱
۴	۱	۲	۳

مثال۲) مربع ۳×۳ زیر یک مربع لاتین نیست. زیرا در سطر و ستون های آن عدد تکراری مـشاهده مـی شود.

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۳	۲	۱

تمرین۱ : یک مربع لاتین از مرتبه‌ی چهار رسم کنید.

پاسخ :

۱	۲	۴	۳
۲	۳	۱	۴
۳	۴	۲	۱
۴	۱	۳	۲

تمرین۲ : با توجه به مربع لاتین زیر، حاصل $x + yz$ را به دست آورید.

x	۲	z
۲	y	۳
۱	۳	۲

پاسخ : با توجه به تعریف مربع لاتین، واضح است که $x = ۳$ و $y = ۱$ و $z = ۱$ پس

$$x + yz = ۳ + (۱)(۱) = ۴$$

تمرین برای حل :

۳ : دو مربع لاتین از متفاوت مرتبه‌ی ۵ بنویسید.

۴ : چند مربع لاتین از مرتبه‌ی ۱ وجود دارد؟ چرا؟

۵ : چند مربع لاتین از مرتبه‌ی ۲ وجود دارد؟ چرا؟

۶ : آیا با تعویض جای دو سطر یا دو ستون از یک مربع لاتین، مربع حاصل یک مربع لاتین است؟ چرا؟

مربع لاتین چرخشی

مربع لاتین زیر را در نظر بگیرید.

۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

ملاحظه می کنید که درایه‌ی آخر سطر اوّل ، همان درایه اوّل سطر دوّم است. این قاعده در سطرهای بعد نیز رعایت شده است.

اگر در یک مربع لاتین درایه‌ی آخر یک سطر ، درایه‌ی اوّل سطر بعد باشد، این مربع لاتـین را مربـع لاتـین چرخشی می نامند.

مثال : مربع زیر، یک مربع لاتین چرخشی ۵×۵ است.

۲	۴	۳	۵	۱
۱	۲	۴	۳	۵
۵	۱	۲	۴	۳
۳	۵	۱	۲	۴
۴	۳	۵	۱	۲

***

مربع لاتین جایگشتی

در یک مربع لاتین با اعمال یک جایگشت (تبدیل یک درایه به یک درایه‌ی دیگر) روی درایه های آن، یک مربع لاتین جدیدی بدست می آید (چرا؟[1]). مربع جدید را مربع لاتین حاصل اعمـال جایگـشت روی درایـه های آن یا **مربع لاتین جایگشتی** می نامند؟

مثال : مربع لاتین زیر را در نظر بگیرید.

۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

[1] . زیرا اگر لاتین نباشد، به این معنی است که در مربع اوّلیه عضو تکراری وجود داشت که با لاتین بودن آن متناقض است.

اگر در این مربع، عدد ۱ به ۳ و عدد ۲ به ۳ ، عدد ۳ به ۴ ، عدد ۴ به ۱ تبدیل شود، مربع جدید یک مربع لاتین است.

۳	۲	۴	۱
۱	۳	۲	۴
۴	۱	۳	۲
۲	۴	۱	۳

تمرین۷ : با اعمال جایگشت روی ۳ و ۲ و ۱ یک مرتبع لاتین دیگر بنویسید.

۳	۲	۱
۲	۱	۳
۱	۳	۲

پاسخ :

۲	۱	۳
۱	۳	۲
۳	۲	۱

۱ → ۳

۲ → ۱

۳ → ۲

***

مربع لاتین استاندارد

یک مربع لاتین مرتبه‌ی n را استاندارد می نامند، هرگاه سطر اوّل آن اعداد از ۱ تا n به ترتیب از چپ به راست نوشته شده باشد.

توجه : اگر یک مربع لاتین استاندارد نباشد، می توان با اعمال یک جایگشت مناسب آن را به صورت استاندارد درآورد. کار کردن با مربع های لاتین استاندارد ، اغلب آسانتر است.

۱	۲	۳	۴	۵
۵	۳	۴	۱	۲
۳	۱	۲	۵	۴
۲	۴	۵	۳	۱
۴	۵	۱	۲	۳

(الف)

۴	۲	۳	۵	۱
۱	۳	۵	۴	۲
۳	۴	۲	۱	۵
۲	۵	۱	۳	۴
۵	۱	۴	۲	۳

(ب)

در شکل مقابل مربع « الف »، استاندارد است ولی مربع« ب » استاندارد نمی باشد.

اگر در مربع« ب » هر جا عدد ۱ را به ۴ و عدد ۵ را به ۴ و عدد ۴ را به ۱ تبدیل کنیم، یک مربع لاتین استاندارد مرتبه‌ی ۵ به دست می آید.

تمرین برای حل :

۸ : مربع لاتین مقابل، را در نظر بگیرید.

۲	۴	۳	۵	۱
۱	۲	۴	۳	۵
۵	۱	۲	۴	۳
۳	۵	۱	۲	۴
۴	۳	۵	۱	۲

الف : با اعمال یک جایگشت دلخواه روی مربع مقابل، یک مربع لاتین دیگر تشکیل دهید.

ب : با اعمال یک جایگشت مناسب روی درایه ها، یک مربع جدید تشکیل دهید که استاندارد باشد.

***

مربع تلفیقی

اگر درایه های دو مربع لاتین هم مرتبه را با حفظ ترتیب کنار هم قرار دهیم، گوییم این دو مربع لاتین تلفیق شده اند و مربع جدید را یک **مربع تلفیقی** (مربع بر هم نهی) می نامند.

مثال : در زیر ملاحظه می کنید که دو مربع لاتین B و A تلفیق شده اند و مربع C تشکیل شده است.

$A =$

۴	۱	۲	۳
۲	۳	۴	۱
۳	۴	۱	۲
۱	۲	۳	۴

$B =$

۳	۴	۱	۲
۴	۱	۲	۳
۲	۳	۴	۱
۱	۲	۳	۴

$\Rightarrow C =$

۴۳	۱۴	۲۱	۳۲
۲۴	۳۱	۴۲	۱۳
۳۲	۴۳	۱۴	۲۱
۱۱	۲۲	۳۳	۴۴

واضح است که در مربع تلفیقی ممکن است درایه های یک سطر با درایه های سطر دیگر متفاوت باشند و یا اینکه درایه ها به ترتیب نباشند، لذا مربع تلفیقی لاتین نیست. اگر B و A دو مربع لاتین باشند، مربع تلفیقی آنها را با نماد $A\Theta B$ نمایش می دهند.

تمرین برای حل :

۹ : دو مربع لاتین ۳×۳ بنویسید، طوری که مربع تلفیقی آنها درایه های تکراری نداشته باشد.

***

دو مربع لاتین متعامد

دو مربع لاتین متفاوت را **متعامد** گوییم ، هرگاه مربع حاصل از تلفیق آنها ، درایه های تکراری نداشته باشد.

مثال: دو مربع لاتین زیر متعامد هستند. زیرا مربع تلفیقی آنها درایه های تکراری ندارد.

$A =$

a	b	c
b	c	a
c	a	b

$B =$

c	a	b
b	c	a
a	b	c

$\Rightarrow A\Theta B =$

ac	ba	cb
bb	cc	aa
ca	ab	bc

مثال: دو مربع لاتین زیر متعامد نیستند. زیرا مربع تلفیقی آنها دو درایه‌ی تکراری دارد.

$A =$

۴	۱	۲	۳
۲	۳	۴	۱
۳	۴	۱	۲
۱	۲	۳	۴

$B =$

۳	۴	۱	۲
۴	۱	۲	۳
۲	۳	۴	۱
۱	۲	۳	۴

$\Rightarrow A\Theta B =$

۴۳	۱۴	۲۱	۳۲
۲۴	۳۱	۴۲	۱۳
۳۲	۴۳	۱۴	۲۱
۱۱	۲۲	۳۳	۴۴

تذکر : برای تشخیص متعامد بودن دو مربع لاتین، به شکل زیرعمل می کنیم.

الف : دو درایه با اعداد یکسان در یکی ازمربع ها در نظر می گیریم.

ب : دو درایه‌ی متناظر با آنها از مربع دیگر را بررسی می کنیم که اگر مساوی باشند، دو مربع متعامد نیستند.

این روش می تواند روش مناسب برای تشخیص متعامد نبودن دو مربع لاتین باشد. برای تشخیص متعامد بودن دو مربع لاتین باید این بررسی را برای تمام درایه های مساوی مربع لاتین اوّلی انجام داد.

$A =$

		a		
				a

$B =$

تمرین ۱۰ : در هر مورد متعامد بودن دو مربع لاتین داده شده را بررسی کنید.

الف :

$A =$

۳	۲	۱
۱	۳	۲
۲	۱	۳

$B =$

۲	۱	۳
۱	۳	۲
۳	۲	۱

پاسخ : بله متعامد هستند. زیرا مربع لاتین حاصل از تلفیق آنها درایه های تکراری ندارد.

۳۲	۲۱	۱۳
۱۱	۳۳	۲۲
۲۳	۱۲	۳۱

ب :

$B=$

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

$A=$

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

پاسخ : خیر متعامد نیستند. زیرا در جایگاه سطر اوّل سطر سوّم و جایگاه سطر دوّم و ستون دوّم در مربع اوّل درایه های یکسان(هر دو ۱) دارد که درایه های نظیر از مربع دوّم مساوی (هر دو ۳) می باشند. مربع لاتین حاصل از تلفیق آنها درایه های تکراری ندارد.

$B=$

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

$A=$

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

پ :

$B=$

۳	۲	۱	۴
۱	۴	۳	۲
۴	۱	۲	۳
۲	۳	۴	۱

$A=$

۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

پاسخ: خیر متعامد نیستند. در جایگاه سطر اوّل ستون دوّم و جایگاه سطر چهارم ستون اوّل در مربع اوّل درایه های یکسان (هر دو عدد ۲) وجود دارند.

$B=$

۳	۲	۱	۴
۱	۴	۳	۲
۴	۱	۲	۳
۲	۳	۴	۱

$A=$

۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

تمرین ۱۱ : درستی یا نادرستی هر یک از گزاره های زیر را تعیین کنید.

الف : فقط یک مربع لاتین از مرتبه‌ی ۱ وجود دارد.

ب : هر دو مربع لاتین مرتبه‌ی۲ متعامد هستند.

پ : مربع لاتین حاصل از اِعمال جایگشت روی اعضای یک مربع لاتین دلخواه می تواند با مربع اوّلیه متعامد باشد.

ت : با تعویض جای سطرهای یک مربع لاتین، همواره مربع لاتین دیگری متعامد با آن به دست می آید.

ث : مربع حاصل از تلفیق (کنار هم قرار دادن درایه های نظیر) دو مربع لاتین، یک مربع لاتین است.

پاسخ: الف : درست　　ب : نادرست　　پ : نادرست　　ت : نادرست　　ث : نادرست

تمرین ۱۲ : آیا دو مربع لاتین متعامد وجود دارد؟ چرا؟

پاسخ: خیر، زیرا فقط دو مربع لاتین مرتبه‌ی۲ وجود دارد که مربع حاصل از تلفیق آنها دارای عضو تکراری است.

$A=$

۱	۲
۲	۱

$B=$

۲	۱
۱	۲

$\Rightarrow A\Theta B=$

۱۲	۲۱
۲۱	۱۲

خواندنی :

الف : فقط یک مربع لاتین ۱×۱ وجود دارد که با خودش متعامد نیست.

ب : فقط دو مربع لاتین ۲×۲ وجود دارد که متعامد نیستند.

ج : ثابت می شود که دو مربع لاتین ۶×۶ متعامد وجود ندارد.

د : برای مربع های لاتین $n\times n$ که در آن $n\neq$ ۱,۲,۶ باشد. مربع های لاتین متعامد وجود دارد.

تمرین ۱۳ : دو مربع لاتین زیر را در نظر بگیرید و به سئوالات داده شده پاسخ دهید.

$B=$

۳	۴	۱	۲
۱	۲	۳	۴
۲	۱	۴	۳
۴	۳	۲	۱

$A=$

۳	۴	۱	۲
۴	۳	۲	۱
۱	۲	۳	۴
۲	۱	۴	۳

الف : آیا این دو مربع لاتین متعامد هستند.

پاسخ : بله. زیرا مربع تلفیقی آنها درایه‌ی تکراری ندارد.

$A\Theta B =$

۳۳	۴۴	۱۱	۲۲
۴۱	۳۲	۲۳	۱۴
۱۲	۲۱	۳۴	۴۳
۲۴	۱۳	۴۲	۳۱

ب : با انجام یک جایگشت دلخواه برای اعضای B، مربع لاتین جدیدی به دست آورید و آن را C بنامید.

آیا دو مربع A و C متعامد هستند؟ چرا؟

پاسخ :

$A\Theta C =$

۳۳	۴۱	۱۲	۲۴
۴۲	۳۴	۲۳	۱۱
۱۴	۲۲	۳۱	۴۳
۲۱	۱۳	۴۴	۳۲

$\rightarrow C =$

۳	۱	۲	۴
۲	۴	۳	۱
۴	۲	۱	۳
۱	۳	۴	۲

۱ $\rightarrow$ ۲
۲ $\rightarrow$ ۴
۳ $\rightarrow$ ۳
۴ $\rightarrow$ ۱

بله. زیرا مربع تلفیقی دو مربع A و C درایه‌ی تکراری ندارد.

تمرین ۱۴ : ثابت کنید که اگر دو مربع لاتین متعامد باشند. مربع لاتینی که با جایگشت بر روی اعضای یکی از آنها به دست می آید نیز با مربع لاتین دیگر متعامد است.

اثبات: فرض کنیم که دو مربع لاتین A و B متعامد بوده و مربع لاتین C مربع حاصل از اعمال جایشگت روی اعضای B باشد. در این صورت دو درایه‌ی یکسان در مربع لاتین A را در نظر می گیریم. اگر درایه های نظیر آنها در مربع لاتین C یکسان باشند، آنگاه نتیجه می شود که درایه های نظیر آنها در مربع لاتین B نیز یکسان خواهند بود و این با متعامد بودن A و B تناقض دارد. پس A و C نیز متعامد می باشند.

تمرین ۱۵ : آیا مربع لاتین حاصل از اعمال یک جایگشت روی اعضای یک مربع لاتین دلخواه می تواند با مربع اولیه متعامد باشد؟

پاسخ : خیر ممکن است متعامد نباشند. به مثال زیر دقت کنید.

$A =$

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

۱ $\rightarrow$ ۲
۲ $\rightarrow$ ۳
۳ $\rightarrow$ ۱

$\Rightarrow B =$

۲	۳	۱
۳	۱	۲
۱	۳	۲

تمرین ۱۶ : مربع لاتین مقابل را در نظر بگیرید و سپس به سئوالات زیر پاسخ دهید.

$A =$

۳	۱	۲
۱	۲	۳
۲	۳	۱

الف : سطر دوّم و سوّم مربع A را جابجا کنید و مربع حاصل را B بنامید. آیا دو مربع A و B متعامد هستند؟ چرا؟

پاسخ :

$B =$

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

$\Rightarrow$

۳۳	۱۱	۲۲
۱۲	۲۳	۳۱
۲۱	۳۲	۱۳

دو مربع A و B متعامد هستند. زیرا مربع تلفیقی آنها درایه‌ی تکراری ندارد.

ب : ابتدا سطر اوّل و سوّم مربع A را جابجا کنید و مربع حاصل را C بنامید. سپس در مربع جدید یعنی C، سطر دوّم و سوّم را جابجا کنید و مربع حاصل را D بنامید. آیا دو مربع A و D متعامد هستند؟ چرا؟

پاسخ :

$C =$

۲	۳	۱
۱	۲	۳
۳	۱	۲

$D =$

۲	۳	۱
۳	۱	۲
۱	۲	۳

$\Rightarrow$

۳۲	۱۳	۲۱
۱۳	۲۱	۳۲
۲۱	۳۲	۱۳

خیر متعامد نیستند. زیرا مربع تلفیقی آنها درایه‌ی تکراری دارد.

پ : با توجه به قسمت های « الف» و « ب » به سئوالات زیر پاسخ دهید.

*) آیا می توان گفت با تعویض جای سطرهای یک مربع لاتین، همواره مربع لاتین متعامد با مربع لاتین اوّل به دست می آید؟

پاسخ : خیر ممکن است متعامد باشند و ممکن است نباشند.

*) آیا می توان گفت با تعویض جای سطرهای یک مربع لاتین، همواره مربع لاتین غیرمتعامد با مربع لاتین اوّل به دست می آید؟

پاسخ : خیر ممکن است متعامد باشند و ممکن است نباشند.

تمرین برای حل :

۱۷ : در هر مورد متعامد بودن دو مربع لاتین داده شده را بررسی کنید.

الف :

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

ب :

۳	۴	۱	۲
۱	۲	۳	۴
۲	۱	۴	۳
۴	۳	۲	۱

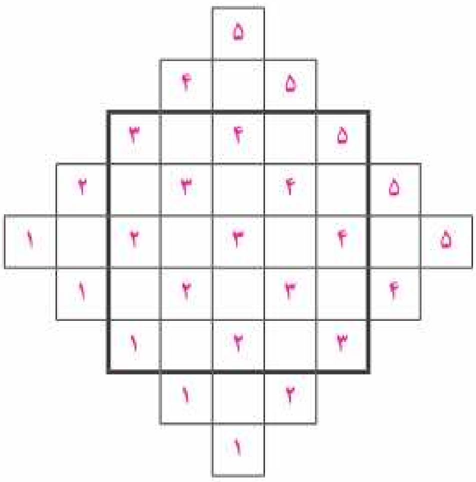
۳	۴	۱	۲
۴	۳	۲	۱
۱	۲	۳	۴
۲	۱	۴	۳

***

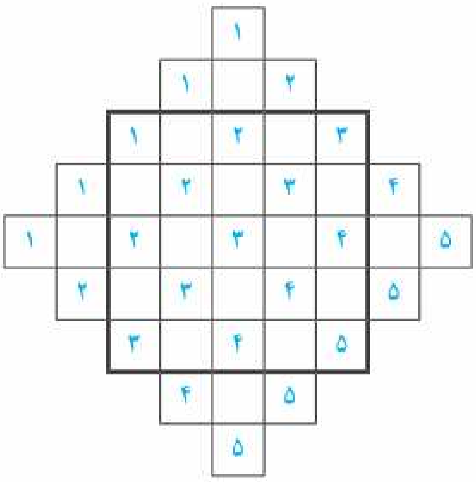
روش های ساخت مربع های لاتین متعامد[2]

روش اوّل : این روش را با ذکر مثال توضیح می دهیم. فرض کنید که می خواهیم، دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ی ۵ تشکیل دهیم.

برای این کار ابتدا اعداد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و۵ را با نظم خاصی (به نحوه‌ی چینش اعداد دقت کنید.) در دو شکل « الف» و « ب » چیده شده اند.

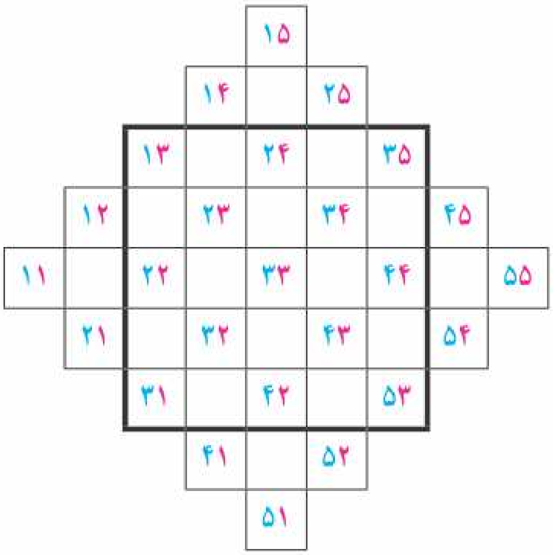


الف)



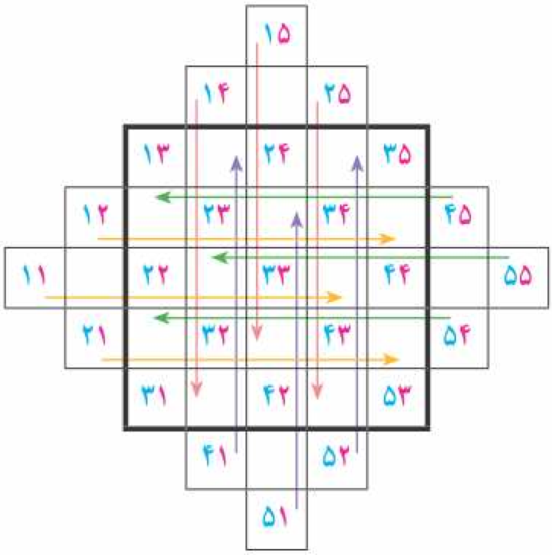
ب)

از کنار هم قرار دادن اعداد متناظر از شکل های « الف » و « ب » ، شکل زیر به دست می آید که در آن عدد دورقمی تکراری وجود ندارد.



[2] . در این کتاب فقط به روش های ساخت مربع های لاتین مرتبه‌ی فرد پرداخته می شود.

حال با پررنگ کردن مربع ۵×۵ وسط، در شکل مرحله‌ی دوّم و با انتقال اعداد خارج از این مربع بـه داخـل آن مربع های لاتین مورد نظر بدست می آید. توجه کنید که هر عدد خارج مربع به اندازه‌ی مرتبه‌ی مربع (که در اینجا ۵ می باشد.) انتقال افقی یا عمودی دارد.



با توجه به آنچه که گفته شد. مربع زیر را تکمیل نموده و سپس دو مربع لاتین تشکیل دهید.

۱۳		۲۴		۳۵
	۲۳		۳۴	
۲۲		۳۳		۴۴
	۳۲		۴۳	
۳۱		۴۲		۵۳

***

روش دوّم : در این روش از ایده‌ی مربع های لاتین چرخشی استفاده می شود.

بدین شکل که ابتدا یک مربع لاتین چرخشی می سازیم و سپس سطرها یا ستون های متساوی الفاصله‌ی از ابتدا و انتها را جابجا می کنیم، تا مربع دیگر به دست آید. برای مثال اگر بخواهیم دو مربع لاتـین مرتبـه‌ی ۵ متعامد تشکیل دهیم به شکل زیر عمل می کنیم.

گام ۱ : تشکیل مربع لاتین چرخشی

۱	۲	۳	۴	۵
۵	۱	۲	۳	۴
۴	۵	۱	۲	۳
۳	۴	۵	۱	۲
۲	۳	۴	۵	۱

گام ۲ : جابجایی سطرهای متساوی الفاصله

$$R_1 \leftrightarrow R_5 \quad R_2 \leftrightarrow R_4 \Rightarrow$$

۲	۳	۴	۵	۱
۳	۴	۵	۱	۲
۴	۵	۱	۲	۳
۵	۱	۲	۳	۴
۱	۲	۳	۴	۵

واضح است که با تلفیق این دو مربع، عدد تکراری نخواهیم داشت.

روش سوّم : اساس این روش بر قطرهای مربع مبتنی است. بدین شـکل که ابتدا یک مربع از مرتبه‌ی فرد طوری تنظیم می کنیم که قطر اصـلی آن مثلاً ۱ باشد. خانه های بالای قطر اصلی را به ترتیب بـه همـان نظـم قطـر اصلی تکمیل می کنیم. خانه های پایین قطر اصلی را بـا توجـه بـه تعریـف مربع لاتین تکمیل می کنیم. برای مثال به مربع مقابل دقت کنید.

۱	۲	۳	۴	۵
۵	۱	۲	۳	۴
۴	۵	۱	۲	۳
۳	۴	۵	۱	۲
۲	۳	۴	۵	۱

اکنون به طور مشابه قطر فرعی را با همان نظم قبلی تکمیل مـی کنـیم تـا مربع جدید حاصل شود. واضح است که با تلفیق این دو مربع، عدد تکـراری نخواهیم داشت.

۵	۴	۳	۲	۱
۴	۳	۲	۱	۵
۳	۲	۱	۵	۴
۲	۱	۵	۴	۳
۱	۵	۴	۳	۲

تمرین۱۸ : دو مربع لاتین از مرتبه‌ی ۵ رسم کنید که متعامد باشند.

پاسخ : ابتدا یک مربع لاتین از مرتبه‌ی ۵ تشکیل می دهیم. سپس با توجه به تعویض سطرها مربع دیگری متعامد با آن می توان تشکیل داد.

۱	۲	۳	۴	۵
۲	۳	۴	۵	۱
۳	۴	۵	۱	۲
۴	۵	۱	۲	۳
۵	۱	۲	۳	۴

$$\begin{matrix} R۱ \leftrightarrow R۵ \\ R۲ \leftrightarrow R۴ \end{matrix} \Rightarrow$$

۵	۱	۲	۳	۴
۴	۵	۱	۲	۳
۳	۴	۵	۱	۲
۲	۳	۴	۵	۱
۱	۲	۳	۴	۵

تمرین ۱۹ : مربع لاتین مقابل را در نظر بگیرید و سپس مربع لاتین دیگری تشکیل دهید که با آن متعامد باشد.

ریاضی	فیزیک	شیمی
شیمی	ریاضی	فیزیک
فیزیک	شیمی	ریاضی

پاسخ : تعویض سطرها مربع دیگری متعامد با آن می توان تشکیل داد.

$$R۱ \leftrightarrow R۳ \Rightarrow$$

ریاضی	شیمی	فیزیک
فیزیک	ریاضی	شیمی
شیمی	فیزیک	ریاضی

تمرین ۲۰ : در شکل زیر مربع های لاتین B و A متعامد هستند. خانه های خالی را کامل کنید.

$A =$

۱	۲	۳	۴	۵
۲	۳	۴	۵	۱
۳	۴	۵	۱	۲
۴	۵	۱	۲	۳
۵	۱	۲	۳	۴

$B =$

۵	۱	۲	۳	۴
۳	۴	۵	۱	۲
۱	۲	۳	۴	۵

پاسخ : با توجه با اینکه مربع B یک مربع لاتین و متعامد با A است. لذا خانه های خالی را می توان به شکل زیر تکمیل کرد.

$B =$

۵	۱	۲	۳	۴
۴	۵	۱	۲	۳
۳	۴	۵	۱	۲
۲	۳	۴	۵	۱
۱	۲	۳	۴	۵

تمرین برای حل :

۲۱: به روش دلخواه دو مربع لاتین متعامد از مرتبه‌ی۷ تشکیل دهید.

کاربردهای مربع لاتین متعامد

یکی از مهمترین کاربردهای مربع های لاتین برنامه ریزی است. تنظیم برنامه‌ی کلاسی مانند آنچه که در مقدمه‌ی این درس بیان شد، از ساده ترین کاربردهای مربع لاتین است.

برنامه ریزی برای استفاده غیر همزمان از منابع و امکانات و نیروی انسانی به شکل مثال های بعد از جمله کاربردهای مربع های لاتین متعامد می باشد.

مثال۱ : قرار است ۳ کارگر با ۳ نوع ماشین رنگ سازی و ۳ نوع رنگ متفاوت در سه روز اوّل هفته کار کنند. به گونه ای که هر کارگر با هر نوع ماشین و هر نوع رنگ دقیقاً یک بار کار کرده باشد و هر رنگ در هر ماشین دقیقاً یک بار به کار گرفته شود. برای حل این مسئله برنامه ریزی کنید.

پاسخ : کافی است دو مربع لاتین متعامد از مرتبه‌ی۳ تشکیل دهیم. فرض کنید که w نام کارگرها و اعداد نوع ماشین و حروف لاتین نوع رنگ باشند. در این صورت چون دو مربع لاتین زیر متعامد هستند، پس از تلفیق آنها مربع جدیدی حاصل می شود که جواب مسئله است.

$A=$

	$w_۱$	$w_۲$	$w_۳$
شنبه	۱	۲	۳
یکشنبه	۲	۳	۱
دوشنبه	۳	۱	۲

$B=$

	$w_۱$	$w_۲$	$w_۳$
شنبه	c	a	b
یکشنبه	b	c	a
دوشنبه	a	b	c

$A\Theta B=$

	$w_۱$	$w_۲$	$w_۳$
شنبه	۱c	۲a	۳b
یکشنبه	۲b	۳c	۱a
دوشنبه	۳a	۱b	۲c

مثال۲ : قرار است ۴ مهندس کامپیوتر با ۴ کامپیوتر مختلف روی۴ نرم افزار متفاوت در ۴ روز اوّل هفته کار کنند، به طوری که هر مهندس با هر کامپیوتر و هر نرم افزار دقیقاً یک بار کارکند و نیز هر نرم افزار در هر کامپیوتر دقیقاً یک بار استفاده شود. برای این مسئله برنامه ریزی کنید.

پاسخ : کافی است دو مربع لاتین متعامد از مرتبه‌ی۳ تشکیل دهیم. فرض کنید که w نام مهندس ها و اعداد نوع کامپیوتر و حروف لاتین نوع نرم افزار باشند. در این صورت چون دو مربع لاتین زیر متعامد هستند، پس از تلفیق آنها مربع جدیدی حاصل می شود که جواب مسئله است.

$B =$

	w_1	w_2	w_3	w_4
شنبه	b	c	d	a
یکشنبه	d	a	b	c
دوشنبه	a	d	c	b
سه شنبه	c	b	a	d

$A =$

	w_1	w_2	w_3	w_4
شنبه	۲	۳	۴	۱
یکشنبه	۳	۲	۱	۴
دوشنبه	۴	۱	۲	۳
سه شنبه	۱	۴	۳	۲

$A \Theta B =$

	w_1	w_2	w_3	w_4
شنبه	۲b	۳c	۴d	۱a
یکشنبه	۳d	۲a	۱b	۴c
دوشنبه	۴a	۱d	۲c	۳b
سه شنبه	۱c	۴b	۳a	۲d

مثال۳ : قرار است ۵ کارگر با ۵ نوع ماشین نخ ریسی و ۵ نوع الیاف در ۵ روز هفته، به گونه ای کار کنند که هر کارگر با هر نوع ماشین و هر نوع الیاف دقیقاً یک بار کارکرده باشد و نیز هر الیاف در هر ماشین دقیقاً یک بار بکار گرفته شود. برای این مسئله برنامه ریزی کنید.

پاسخ: کافی است دو مربع لاتین متعامد از مرتبه‌ی۵ تشکیل دهیم. فرض کنید که w نام کارگرها و اعداد نوع ماشین ریسندگی و حروف لاتین نوع الیاف باشند. در این صورت چون دو مربع لاتین زیر متعامد هستند، پس از تلفیق آنها مربع جدیدی حاصل می شود که جواب مسئله است.

$B =$

	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5
شنبه	c	a	d	b	e
۱ شنبه	e	c	a	d	b
۲ شنبه	b	e	c	a	d
۳ شنبه	d	b	e	c	a
۴ شنبه	a	d	b	e	c

$A =$

	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5
شنبه	۱	۴	۲	۵	۳
۱ شنبه	۴	۲	۵	۳	۱
۲ شنبه	۲	۵	۳	۱	۴
۳ شنبه	۵	۳	۱	۴	۲
۴ شنبه	۳	۱	۴	۲	۵

$A\Theta B =$

	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5
شنبه	۱c	۴a	۲d	۵b	۳e
۱ شنبه	۴e	۲c	۵a	۳d	۱b
۲ شنبه	۲b	۵e	۳c	۱a	۴d
۳ شنبه	۵d	۳b	۱e	۴c	۲a
۴ شنبه	۳a	۱d	۴b	۲e	۵c

تمرین برای حل :

۲۲ : قرار است شش مدرس T_1 و T_2 و ... و T_6 در شش جلسه‌ی متوالی در شش کلاس C_1 و C_2 و ... و C_6 به گونه ای تدریس کنند که هر مدرس در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس کند. برای این منظور برنامه ریزی کنید.

۲۳ : در یک مسابقه‌ی اتومبیل رانی قرار است، ۷ راننده در هفت روز هفته با هفت ماشین مختلف در هفت مسیر مختلف مسابقه دهند، طوری که شرایط زیر برقرار باشد.

الف : هر راننده هر روز با یک ماشین در یک مسیر رانندگی کند.

ب : هر راننده با هر ماشین دقیقاً یک روز رانندگی کند.

ج : هر راننده هر روز دقیقاً در یک مسیر رانندگی کند.

د : هر ماشین در هر مسیر دقیقاً یک بار به کار گرفته شود.

برای این منظور برنامه ریزی کنید.

***

درس دوّم : مباحثی در ترکیبات

در این درس ابتدا اصل جمع و اصل ضرب و همچنین بعضی از تکنیک ها و روش های شمارش مانند تبدیل و ترکیب جهت ورود به بحث مختصراً و با ذکر مثال را یادآوری نموده و در ادامه جایگشت هـای بـا تکـرار را بیان می کنیم.

یادآوری و تکمیل

الف : اصل ضرب

اگر کاری شامل دو مرحله باشد، به طوری که برای انجام مرحله‌ی اوّل m انتخاب و برای انجام هر کدام از این m انتخاب، در مرحله‌ی دوّم n روش انجام وجود داشته باشد، در کل، کار مورد نظر با $m \times n$ روش قابل انجام است.

اصل ضرب برای تعداد محدودی مرحله برای انجام یک کار قابل تعمیم است.

تمرین ۱ : یک کارخانه خودرو سازی، خودروهایی در ۷ رنگ، با ۲ حجم موتور و ۳ نوع مختلف جلو داشبورد تولید می کند. یک خریدار برای خرید یک خودرو از این کارخانه چند انتخاب دارد؟

حل : طبق اصل ضرب

تعداد حالت های انتخاب $\quad ۷ \times ۲ \times ۳ = ۴۲$

***

ب : معرفی نماد فاکتوریل

فرض‌کنید که n یک عدد صحیح نامنفی باشد. فاکتوریل n که با نماد $n!$ نمایش داده می شود، به شکل زیر تعریف می شود.

اگر $n = ۰$ باشد. در این صورت $۰! = ۱$

اگر $n = ۱$ باشد. در این صورت $۱! = ۱$

اگر $n > ۱$ باشد. در این صورت $n!$ برابر حاصل ضرب تمام اعداد طبیعی کوچکتر یا مساوی آن است. یعنی

$$n! = ۱ \times ۲ \times ۳ \times \ldots \times n$$

مثال :

الف) $۴!=۱\times۲\times۳\times۴=۲۴$ ب) $۶!=۱\times۲\times۳\times۴\times۵\times۶=۷۲۰$

توجه : با توجه به مفهوم فاکتوریل یک عدد طبیعی می توان نوشت که: $n!=n(n-۱)!$

برای مثال : $۶!=۶\times۵!$

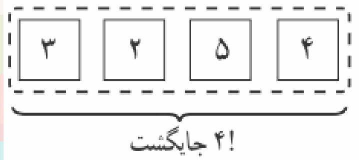
اگر چند شیءِ متمایز داشته باشیم، به هر حالتِ چیدنِ آنها کنار هم ، یک **جایگشت** از آن اشیاء می گوییم.

مثلاً: تعداد حالت های صف گرفتن چهار دانش آموز کنار هم برابر با $۴!$ است.

نتیجه : تعداد جایگشت های n شیء (نفر) متمایز برابر $n!$ است.

تمرین ۲ : با ارقام ۲ و ۳ و ۴ و ۵ ، یک رمز شامل ۷ کاراکتر تشکیل می دهیم. تعداد کل رمز هایی که می توان تشکیل داد، را تعیین کنید.

حل : این ۴ رقم به $۴!$ طریق می توانند کنار هم قرار گیرند و رمز تولید کنند.



توجه : گاهی برای شماش در حالت های خاص، باید روش هایی همچون دسته بندی اشیاء استفاده کرد. به مثال زیر توجه کنید.

مثال : فرض کنید می خواهیم با سه حرف « چ» و « پ » و « ژ » و ارقام ۲ و ۳ و ۴ و ۵ یک رمز شامل ۷ کاراکتر تشکیل دهیم. مطلوب است:

الف : تعداد کل رمز هایی که می توان تشکیل داد.

ب : تعداد رمز هایی که در هر یک از آنها همواره حروف کنار یکدیگرند.

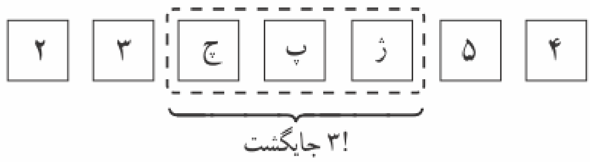
ج : تعداد رمز هایی که در هر یک از آنها همواره ارقام کنار یکدیگرند.

د : تعداد رمز هایی که در هر یک از آنها همواره ارقام کنار هم و حروف نیز کنار هم باشند.

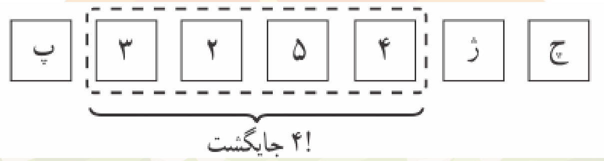
حل :

الف : ۳ حرف و ۴ رقم روی هم ۷ شیء متمایز بوده و به $۷!$ طریق می توانند کنار هم قرار گیرند و رمز تولید کنند.

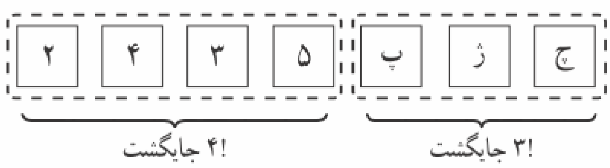
ب : کافی است ابتدا سه حرف را با هم یک شیء در نظر بگیریم و آنها را با ۴ رقم داده شده روی هم ۵ شیء فرض کنیم. در این صورت ۵! جایگشت دارند. در هر جایگشت، سه حرفِ داده شده هم در عین حال که کنار هم هستند، ۳! جایگشت دارند و لذا طبق اصل ضرب تعداد کل رمزهای مورد نظر برابر $5!\times3!$ می شوند.



ج : مشابه قسمت قبل، ابند ۴ رقم داده شده را یک شیء فرض می کنیم که با ۳ حرف مفروض روی هم ۴ شیء بوده و ۴! جایگشت داشته و در هر جایگشت ۴ رقم داده شده ، هم ۴! در کنار هم جایگشت دارند، لذا تعداد رمز مورد نظر ، طبق اصل ضرب عبارت است از $4!\times4!$



د : حروف را یک شیء و ارقام را نیز با هم یک شیء فرض می کنیم که روی هم دو شیء شده است و ۳! حروف در کنار هم و ۴! نسز ارقام کنار هم جایگشت دارند. لذا طبق اصل ضرب تعداد رمز های مورد نظر عبارتند از $4!\times3!\times2!$



تمرین۳ : ۵ دانش آموز پایه‌ی دوازدهم و۴ دانش آموز پایه‌ی یازدهم به چند طریق (در یک ردیف) قرار بگیرند؟ اگر بخواهیم:

الف: همواره دانش آموزان هر پایه کنار هم باشند.

ب : دانش آموزان به صورت یک در میان قرار بگیرند (هیچ دو دانش آموز هم پایه کنار هم نباشند).

ج : اگر دانش آموزان پایه‌ی یازدهم نیز ۵ نفر باشند، به چند طریق می توان آنها را به صورت یک در میان قرار داد؟

حل : اگر دانش آموزان را دسته بندی کنیم، خواهیم داشت:

الف) $۲!\times۴!\times۵!$

ب) $۴!\times۵!$

البته می توان به صورت زیر نیز مسئله را حل کرد.

$$۵\times۴\times۴\times۳\times۳\times۲\times۲\times۱\times۱=(۵\times۴\times۳\times۲\times۱)\times(۴\times۳\times۲\times۱)=۵!\times۴!$$

ج) $۲\times(۵!\times۵!)$

تمرین۴ : ۷ پرچم مختلف را به هفت میله پرچم نصب کرده ایم و روی میله ها شماره های ۱ تا ۷ حک کرده ایم. چنانچه پرچم ها کنار هم در یک ردیف قرار گیرند،

الف: تعداد کل حالت های کنار هم قرار گرفتن میله های پرچم را حساب کنید.

ب : تعداد حالت هایی را حساب کنید که میله‌ی پرچم های با شماره های غیر اوّل در مکان های زوج باشند.

حل :

الف

$۷\times۶\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱=۷!=۵۰۴۰$ تعداد کل حالت ها

ب :

۷ و ۵ و ۳ و ۲ پرچم های اوّل

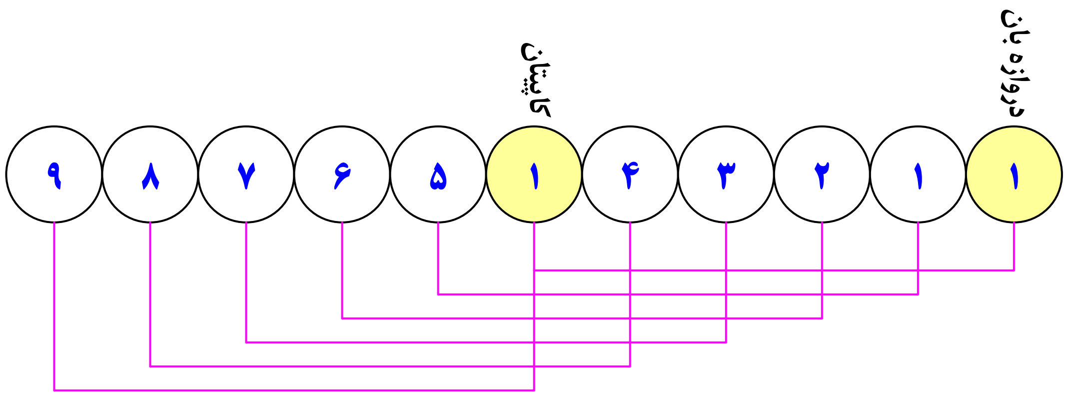
۶ و۴ و۱ پرچم های غیر اوّل

مکان۱	مکان۲	مکان۳	مکان۴	مکان۵	مکان۶	مکان۷
۱	۱	۲	۲	۳	۳	۴

$۴\times۳\times۳\times۲\times۲\times۱\times۱=۴!\times۳!=۱۴۴$ تعداد حالت ها

تمرین۵ : یازده بازیکن فوتبال تیم مدرسه‌ی شما به طور تصادفی کنار یکدیگر قرار می گیرند تا عکسی یادگاری بیندازند. چنانچه دروازه بان و کاپیتان تیم ، دو نفر متفاوت باشند، مطلوب است محاسبه‌ی تعداد حالت هایی که در عکس دقیقاً ۴ نفر بین دروازه بان و کاپیتان حضور داشته باشند؟

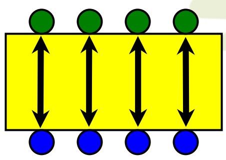
حل :



$۲\times۶\times۹! =$ تعداد حالت های مورد نظر

تمرین۶ : می خواهیم ۸ نفر را که دو به دو برادرِ یکدیگرند در دو طرفِ طولِ یک میز مستطیل شکل بنشانیم. اگر بخواهیم هر نفر روبروی برادرش بنشیند، به چند طریق می توان این کار را انجام داد؟

حل : مسئله را به این صورت بیان می کنیم که :



مطابق شکل دور یک میز۴ جفت صندلی روبروی هم داریم که می خواهیم ۴ جفت برادر را روی آنها بنشانیم. طبق اصل شمارش این عمل به $۴!$ حالت امکان پذیر است. از طرفی برای هر جفت صندلی که دو برادر می خواهند روی آن بنشینند ۲ حالت داریم (کدام برادر روی صندلی آبی و کدام روی صندلی سبز بنشیند) و با وجود ۴ صندلی طبق اصل شمارش باید $۴!$ در $۲^۴ = ۲\times۲\times۲\times۲$ ضرب شود. بنابراین جواب مسئله $۲^۴\times۴!$ است.

تمرین۷ : ۴ کتاب فیزیک متفاوت و ۵ کتاب ریاضی متفاوت را می توانیم به چند طریق در قفسه ای و در یک ردیف بچینیم. به نظر شما این عمل به چند روش امکان پذیر است؟ اگر:

الف : هیچ محدودیتی نباشد.

ب : همواره کتاب های فیزیک کنار هم باشند.

پ : هیچ دو کتاب ریاضی کنار هم نباشند.

ت : یک کتاب ریاضی خاص و دو کتاب فیزیک خاص همواره کنار هم باشند.

حل :

الف : چیدن ۹ کتاب بدون هیچ محدودیتی به $۹!$ طریق امکان پذیر است.

ب : ۴ کتاب فیزیک را به عنوان یک دسته کتاب که به همراه ۵ کتاب ریاضی ، روی هم ۶ شیء محسوب می شوند و تعداد جایگشت آنها!۶ خواهد بود. از طرفی۴ کتاب فیزیک به تعداد!۴ طریق با هم امکان جابجایی دارند. لذا طبق اصل ضرب ، جواب مسئله !۴×!۶ است.

پ : باید کتاب ها بنا به موضوع یکی در میان چیده شوند.

RFRFRFRFR

لذا برای ریاضی ها !۵ و برای فیزیک ها !۴حالت داریم و طبق اصل ضرب در کل !۴×!۵ روش چیدن امکان پذیر است.

ت : کتابهای خاص را به عنوان یک دسته‌ی سه تایی که به!۳ طریق کنار هم قرار می گیرند، در نظر می گیریم. از طرفی این دسته به همراه ۶ کتاب باقی مانده به!۷ طریق می توان کنار هم چید. در نتیجه بنا به اصل ضرب این مسئله به !۷×!۳ روش امکان پذیر است.

تمرین۸ : برای کنار هم قرار گرفتن ۴ دانش آموز پایه‌ی دوازدهم و ۶ دانش آموز پایه‌ی یازدهم مسئله ای طرح کنید که پاسخ آن !۴×!۷ باشد.

حل : ۴ دانش آموز پایه‌ی دوازدهم و ۶ دانش آموز پایه‌ی یازدهم به چند طریق می توانند در یک صف کنار هم قرار گیرند، به طوری که همواره دانش آموزان پایه‌ی دوازدهم کنار هم باشند.

***

پ: ترتیب و ترکیب

در انتخاب r شییء از n شییء بدون تکرار اشیاء دو حالت وجود دارد.

الف : اگر اولویت (تقدم و تأخر) اشیاء مهم باشد. این نوع انتخاب را **ترتیب** می نامند و تعداد حالت های آن را به شکل زیر به دست می آورند.

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال : تعداد کلمات سه حرفی که با ۷ حرف کلمه‌ی« خوزستان» تشکیل می شوند، برابر است با:

$$P(۷,۳)=\frac{۷!}{(۷-۳)!}=\frac{۷!}{۴!}=\frac{۷\times۶\times۵\times۴!}{۴!}=۲۱۰$$

در این مثال تقدم و تأخر اشیاء (حروف) مهم است.برای مثال کلمات« ستا » با « تاس» تفاوت دارند. به همین دلیل از ترتیب استفاده شد.

ب : اگر اولویت (تقدم و تأخر) اشیاء مهم نباشد. این نوع انتخاب را **ترکیب** می نامند و تعداد حالت های آن را به شکل زیر به دست می آورند.

$$C(n,r)=\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

مثال : تعداد زیر مجموعه های سه عضوی مجموعه‌ی۷ عضوی $\{a,b,c,d,e,f,g\}$ ، برابر است با:

$$C(۷,۳)=\binom{۷}{۳}=\frac{۷!}{۳!\,(۷-۳)!}=\frac{۷!}{۳!\times۴!}=\frac{۷\times۶\times۵\times۴!}{۳\times۲\times۱\times۴!}=۳۵$$

در این مثال تقدم و تأخر اشیاء (عضوها) مهم نیست.برای مثال زیر مجموعه های« $\{a,b,c\}$» با « $\{b,a,c\}$ » تفاوت ندارد. به همین دلیل از ترکیب استفاده شد.

توجه : برخی از حالت های خاص ترکیب بصورت زیر می باشند.

۱) $\binom{n}{۰}=\binom{n}{n}=۱$

۲) $\binom{n}{۱}=\binom{n}{n-۱}=n$

۳) $\binom{n}{۲}=\binom{n}{n-۲}=\frac{n(n-۱)}{۲}$

۴) $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$

تمرین۹ : اگر داشته باشیم $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ و $B=\{۵,۶,۷,۸,۹\}$ در این صورت چند رمز یا کد ۵ رقمی می توان نوشت که هر یک شامل دو رقم متمایز از A و سه رقم متمایز از B باشد.

حل :

$\binom{۴}{۲}=$ تعداد حالات انتخاب ۲ رقم از ۴ رقم مجموعه‌ی A

$\binom{۵}{۳}=$ تعداد حالات انتخاب ۳ رقم از ۵ رقم مجموعه‌ی B

از طرفی تعداد حالات چینش ۵ رقم به صورت یک کد ۵ رقمی!۵ می باشد. لذا طبق اصل ضرب، جواب مسئله $\binom{۴}{۲}\times\binom{۵}{۳}\times۵!$ است.

ت : جایگشت های با تکرار (جایگشت های متمایز)

گاهی اوقات برای شمارش در حالت های خاص باید از روش هایی همچون تقسیم کل جایگشت های ممکن بر تعداد حالت هایی که تکراری یا بی اثر محسوب می شوند، استفاده کنیم. به مسئله‌ی زیر توجه کنید.

در پاسخ به این مسئله که با ارقام ۸۵۸۸۵ چند ترتیب مختلف می توان ساخت؟ چنین می توان گفت که تعداد کل حالت ها برابر !۵ می شوند ولی چون رقم ۸ سه بار تکرار شده و جابجایی آنها تـأثیر روی تعـداد نـدارد و همچنین رقم ۵ دو بار تکرار شده و جابجایی آنها نیز تأثیری روی تعداد نخواهد داشت. لذا باید تعـداد کـل را بر !۳ و !۲ تقسیم کنیم. در نتیجه تعداد ترتیب ارقام ۸۵۸۸۵ حاصل تقسیم زیر است.

$$\frac{۵!}{۲!\times ۳!}$$

که با نماد $\binom{۵}{۲,۳}$ نیز نمایش داده می شود.

نتیجه : تعداد جایگشت های n شیئ در صـورتی کـه $n_۱$ شـیئ از نـوع a و $n_۲$ شـیئ از نـوع b و ... و در نهایت n_m شیئ از نوع z باشند از رابطه‌ی زیر بدست می آید. $(n = n_۱ + n_۲ + n_۳ + ... + n_m)$

$$\binom{n}{n_۱, n_۲, n_۳, ..., n_m} = \frac{n!}{n_۱!\times n_۲!\times n_۳!\times ...\times n_m!}$$

مثال : با حروف کلمه‌ی $BANANA$ چند جایگشت وجود دارد؟

جمع	N	A	B	حرف
۶	۲	۳	۱	تعداد

$$\binom{۶}{۱,۳,۲} = \frac{۶!}{۱!\times ۳!\times ۲!} = \frac{۶\times ۵\times ۴\times ۳\times ۲\times ۱}{۱\times ۳\times ۲\times ۱\times ۲\times ۱} = ۶۰$$

تمرین ۱۰ : با حروف کلمه‌ی « ایرانیان » چند ترتیب مختلف می توان ساخت؟

حل :

جمع	ن	ر	ی	آ	حرف
۸	۲	۱	۲	۳	تعداد

$$\binom{۸}{۳,۲,۱,۲} = \frac{۸!}{۳!\times ۲!\times ۱!\times ۲!} = ۱۶۸۰$$

تمرین ۱۱ : با ارقام ۲۸۵۸۸۸۵ چند ترتیب مختلف می توان ساخت؟

حل :

جمع	۵	۸	۲	رقم
۷	۲	۴	۱	تعداد

$$\binom{۷}{۱,۴,۲}=\frac{۷!}{۱!\times ۴!\times ۲!}=۱۰۵$$

تمرین ۱۲ : با ارقام ۵ و ۶ و ۷ و ۷ و ۵ و ۷ چه تعداد کد ۶ رقمی می توان نوشت؟

حل :

جمع	۶	۷	۵	عدد
۶	۱	۳	۲	تعداد

$$\binom{۶}{۲,۳,۱}=\frac{۶!}{۲!\times ۳!\times ۱!}=۶۰$$ تعداد کدها

تمرین ۱۳ : می خواهیم روی تعدادی جعبه‌ی حاوی اجناس تولید شده‌ی خاصی را کد گذاری و هر جعبه را با یک کد، شامل ۹ حرفِ a و a و b و a و c و c و d و d و d از بقیه مجزا کنیم. حداکثر چند جعبه را می توانیم با این کدها از بقیه مجزا کنیم؟

حل :

جمع	d	c	b	a	حرف
۹	۳	۲	۱	۳	تعداد

$$\text{تعداد جعبه ها}=\binom{۹}{۳,۱,۳,۲}=\frac{۹!}{۳!\times ۱!\times ۳!\times ۲!}=۵۰۴۰$$

تمرین ۱۴: ۷ نفر به چند طریق می توانند در دو اتاق دو نفره و یک اتاق سه نفره قرار بگیرند؟

حل :

جمع	اتاق c	اتاق b	اتاق a	اتاق
۷	۳	۲	۲	تعداد

$$\text{تعداد حالت ها}=\binom{۷}{۳,۲,۲}=\frac{۷!}{۳!\times ۲!\times ۲!}=۲۱۰$$

ث : محاسبه‌ی تعداد جواب های صحیح و نامنفی یک معادله‌ی سیاله با ضرایب واحد

گاهی لازم می شود که تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_r = n$ (n یک عدد طبیعی) را تعیین کنیم. برای آشنایی به روش تعیین تعداد جواب ها به مسئله‌ی زیر دقت کنید.

مسئله: شخصی وارد یک گل فروشی می شود و می خواهد دسته گلی شامل سه شاخه گل ، از بین سه نوع گل مریم، رُز و میخک انتخاب کند. اگر از هر نوع گل به تعداد فراوان موجود باشد. تعیین کنید کـه بـه چنـد طریق می تواند دسته گل انتخاب کند.

اگر تعداد ستاره ها نشان دهنده‌ی شاخه گل باشد. جدول زیر می تواند جواب این مسئله باشد.

میخک	رُز	مریم	حالت (ردیف)
❋	❋	❋	۱
	❋	❋❋	۲
❋		❋❋	۳
	❋❋	❋	۴
❋	❋❋		۵
❋❋		❋	۶
❋❋	❋		۷
		❋❋❋	۸
	❋❋❋		۹
❋❋❋			۱۰

یعنی معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 = ۳$ دارای ۱۰جواب صحیح و نامنفی است. این جواب با توجـه بـه قـضیه‌ی جایگشت با تکرار بین ۵ شیء (۳ ستاره و ۲ خط عمودی جدول) قابل توجیه است.

۳ = تعداد ستاره های هر سطر = تعداد شاخه‌ی گل انتخابی

۱ − ۳ = ۲ = تعداد خط های عمودی برای جدا کردن ۳ نوع گل

۵ = (۱ − ۳) + ۳ = تعداد کل اشیاء (شامل ستاره ها و خط های عمودی)

اکنون چون جابجایی ستاره ها با هم (!۳ حالت) ، دسته گل جدیدی تولید نمی کند و همچنین جابجایی خـط های عمودی با هم (!۲ =!(۱ − ۳) حالت) دسته گل جدیدی تولید نمی کند. پس تعداد کل جابجـایی اشـیاء یعنی !۵ را بر !۳ و !۲ تقسیم می کنیم.

$$\binom{۳+۲}{۲} = \binom{۵}{۲} = \frac{۵!}{۲!\times ۳!} = \binom{۵}{۲,۳} =$$ تعداد کل جایگشت ها

و در حالت کلی برای معادله‌ی $x_۱ + x_۲ + x_۳ + ... + x_r = n$ می توان نوشت:

$n =$ تعداد ستاره های هر سطر $=$ تعداد شاخه‌ی گل انتخابی

$r-۱ =$ تعداد خط های عمودی برای جدا کردن r نوع گل

$n+(r-۱) =$ تعداد کل اشیاء (شامل ستاره ها و خط های عمودی)

اکنون چون جابجایی ستاره ها با هم($n!$حالت)، دسته گل جدیدی تولید نمی کند و همچنین جابجایی خط های عمودی با هم ($(r-۱)!$حالت) دسته گل جدیدی تولید نمی کند. پس تعداد کل جابجایی اشیاء یعنی $(n-(r-۱))!$ را بر $n!$ و $(r-۱)!$ تقسیم می کنیم.

$$\binom{n+(r-۱)}{r-۱} = \frac{(n-(r-۱))!}{n!\times(r-۱)!} = \binom{n-(r-۱)}{n,(r-۱)} =$$ تعداد کل جایگشت ها

اکنون مسئله‌ی فوق را به هدف تعیین تعداد جوابهای طبیعی معادله‌ی $x_۱ + x_۲ + x_۳ + ... + x_r = n$ به شکل زیر مطرح می کنیم.

مسئله: شخصی وارد یک گل فروشی می شود و می خواهد دسته گلی شامل ۵ شاخه گل ، از بین سه نوع گل مریم، رُز و میخک انتخاب کند. اگر از هر نوع گل به تعداد فراوان موجود باشد و خریدار باید از تمام انواع گل بردارد. تعیین کنید که به چند طریق می تواند دسته گل انتخاب کند.

اگر تعداد ستاره ها نشان دهنده‌ی شاخه گل باشد. جدول زیر می تواند جواب این مسئله باشد.

میخک	رُز	مریم	حالت (ردیف)
❋	❋	❋❋❋	۱
❋	❋❋	❋❋	۲
❋❋	❋❋	❋	۳
❋❋❋	❋	❋	۴
❋	❋❋❋	❋	۵
❋❋	❋	❋❋	۶

یعنی معادله‌ی $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۵$ دارای۶ جواب طبیعی (صحیح و مثبت) است.

برای توجیه این جواب به شکل زیر عمل می کنیم.

ابتدا از هر نوع گل۱ شاخه برمی داریم. پس تعداد جواب ها معادله به شکل زیر تقلیل پیدا می کنند.

$$x_1+x_2+x_3=5 \to \underbrace{(x_1-1)}_{y_1}+\underbrace{(x_2-1)}_{y_2}+\underbrace{(x_3-1)}_{y_3}=5-(1+1+1)$$

$$\to y_1+y_2+y_3=2$$

اکنون تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله‌ی $y_1+y_2+y_3=2$ را تعیین می کنیم.

$$\text{تعداد دسته گل ها}=\binom{n+(r-1)}{r-1}=\binom{2+(3-1)}{3-1}=\binom{4}{2}=6$$

در حال کلی برای تعیین تعداد جواب های طبیعی معادله‌ی $x_1+x_2+x_3+\ldots+x_r=n$

ابتدا از هر نوع گل ۱ شاخه برمی داریم و لذا تعداد جواب های دلخواه به $n-r$ حالت تقلیل پیدا می کند.

$$x_1+x_2+x_3+\ldots+x_r=n$$

$$\to \underbrace{(x_1-1)}_{y_1}+\underbrace{(x_2-1)}_{y_2}+\underbrace{(x_3-1)}_{y_3}+\ldots+\underbrace{(x_r-1)}_{y_r}=n-(\underbrace{1+1+\ldots+1}_{r})$$

$$\to y_1+y_2+y_3+\ldots+y_r=n-r$$

اکنون تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله‌ی جدید را تعیین می کنیم.

$$\binom{(n-r)+(r-1)}{r-1}=\binom{n-1}{r-1}$$

نتیجه : اگر n یک عدد طبیعی فرض شود، در این صورت:

۱ : تعداد جوابهای صحیح و نامنفی معادله‌ی $x_1+x_2+x_3+\ldots+x_r=n$ برابر $\binom{n+r-1}{r-1}$ است.

۲ : تعداد جوابهای طبیعی معادله‌ی $x_1+x_2+x_3+\ldots+x_r=n$ برابر $\binom{n-1}{r-1}$ است.

تمرین ۱۵ : تعداد جوابهای صحیح و نامنفی معادله‌ی $x+y+z=4$ را بدست آورید.

حل:

$$\binom{n+r-1}{r-1}=\binom{4+3-1}{3-1}=\binom{6}{2}=\frac{6\times 5}{2}=15$$

تمرین ۱۶ : تعداد جوابهای طبیعی معادله‌ی $x+y+z+t=۱۲$ را تعیین کنید.

حل:

$$\binom{n-۱}{r-۱}=\binom{۱۲-۱}{۴-۱}=\binom{۱۱}{۳}=\frac{۱۱!}{۳!\times ۸!}=۱۶۵$$

تمرین۱۷ : به چند طریق می توان از بین ۴ نوع گل، دسته گلی شامل ۸ شاخه گل را بـه دلخـواه انتخـاب کرد؟

حل :

$$x_۱+x_۲+x_۳+x_۴=۸$$

تعداد جواب های صحیح نامنفی $\binom{۸+(۴-۱)}{۴-۱}=\binom{۱۱}{۳}$

تمرین۱۸ : به چند طریق می توان دسته گلی شامل ۹ شاخه گل را از بین ۴ نوع گل انتخاب کرد، به شرط اینکه از هر نوع گل حداقل ۱ شاخه انتخاب شود؟

حل :

$$x_۱+x_۲+x_۳+x_۴=۹$$

تعداد جواب های طبیعی $\binom{۹-۱}{۴-۱}=\binom{۸}{۳}$

تمرین ۱۹ : شخصی وارد یک گل فروشی می شود و می خواهد دسته گلی شامل ۵ شاخه گل، از بین سه نوع گل مریم، رُز و میخک انتخاب کند. اگر از هر نوع گل به تعداد فراوان موجود باشد و خریدار باید از حتماً حداقل یک شاخه گل مریم بردارد. تعیین کنید که به چند طریق می تواند دسته گل انتخاب کند.

حل : معادله‌ی $x_۱+x_۲+x_۳=۵$ که در آن $x_۱$ تعداد گل های مریم باشد را در نظر بگیرید. طبق مسئله واضح است که :

$$x_۱>۱\rightarrow x_۱\geq ۲\rightarrow \underbrace{x_۱-۲}_{y_۱}\geq ۰\rightarrow x_۱=y_۱+۲$$

$$x_۱+x_۲+x_۳=۵\rightarrow y_۱+۲+x_۲+x_۳=۵\rightarrow y_۱+x_۲+x_۳=۳$$

تعداد جواب های صحیح نامنفی $\binom{۳+(۳-۱)}{۳-۱}=\binom{۵}{۲}=۱۰$

تمرین ۲۰ : معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 14$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط اینکه $x_1 > 1$ و $x_3 > 3$ باشد.

حل :

$$x_1 > 1 \to x_1 \geq 2 \to \underbrace{x_1 - 2}_{y_1} \geq 0 \to x_1 = y_1 + 2$$

$$x_3 > 3 \to x_3 \geq 4 \to \underbrace{x_3 - 4}_{y_3} \geq 0 \to x_3 = y_3 + 4$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 14 \to y_1 + 2 + x_2 + y_3 + 4 + x_4 + x_5 = 14$$

$$\to y_1 + x_2 + y_3 + x_4 + x_5 = 8$$

تعداد جواب های صحیح نامنفی $\binom{8+(5-1)}{5-1} = \binom{12}{4}$

تمرین ۲۱ : معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11$ چند جواب صحیح و مثبت با شرط زیر دارد؟

$$(x_i \geq 1 \,,\, 1 \leq i \leq 5)$$

حل : با توجه به این شرط، معلوم می شود که تعداد جوابهای طبیعی معادله مد نظر است. پس :

تعداد جواب های طبیعی $\binom{11-1}{5-1} = \binom{10}{4}$

تمرین ۲۲ : معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_6 = 12$ چند جواب صحیح و مثبت با شرط زیر دارد؟

$$(x_5 > 2 \,,\, x_3 = 4)$$

حل :

$$x_1 \geq 1 \to\to \underbrace{x_1 - 1}_{y_1} \geq 0 \to x_1 = y_1 + 1$$

$$x_2 \geq 1 \to \underbrace{x_2 - 1}_{y_2} \geq 0 \to x_2 = y_2 + 1$$

$$x_3 = 4$$

$$x_4 \geq 1 \to \underbrace{x_4 - 1}_{y_4} \geq 0 \to x_4 = y_4 + 1$$

$$x_5 > 2 \to x_5 \geq 3 \to \underbrace{x_5 - 3}_{y_5} > 0 \to x_5 = y_5 + 3$$

$$x_6 \geq 1 \to \underbrace{x_6 - 1}_{y_6} \geq 0 \to x_6 = y_6 + 1$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 12$$

$$\to y_1 + 1 + y_2 + 1 + 4 + y_4 + 1 + y_5 + 3 + y_6 + 1 = 12$$

$$\to y_1 + y_2 + y_4 + y_5 + y_6 = 1$$

تعداد جواب های صحیح و نامنفی $\binom{5+1-1}{5-1} = \binom{5}{4} = 5$

تمرین ۲۳ : به چند طریق می توان از بین ۵ نوع گل ۱۱ شاخه گل انتخاب کرد. اگر بخواهیم :

الف : به دلخواه انتخاب کنیم.

ب : از هر نوع گل حداقل ۱ شاخه انتخاب کنیم.

پ : از گل نوع دوّم حداقل دو شاخه و از گل نوع پنجم بیش از سه شاخه انتخاب کنیم.

ت : از گل نوع سوّم انتخاب نکرده و از گل نوع چهارم حداقل ۵ شاخه انتخاب کنیم.

حل :

الف :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11$$

تعداد جواب های صحیح نامنفی $\binom{11+(5-1)}{5-1} = \binom{15}{4}$

ب :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11$$

تعداد جواب های صحیح طبیعی $\binom{11-1}{5-1} = \binom{10}{4}$

پ : یعنی در معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11$ دو شرط $x_2 \geq 2$ و $x_5 > 3$ به همراه صحیح و نامنفی بودن دیگر متغیر های آن برقرار است.

$$x_۲ \geq ۲ \rightarrow \underbrace{x_۲ - ۲}_{y_۲} \geq ۰ \rightarrow x_۲ = y_۲ + ۲$$

$$x_۵ > ۳ \rightarrow x_۵ \geq ۴ \rightarrow \underbrace{x_۵ - ۴}_{y_۵} \geq ۰ \rightarrow x_۵ = y_۵ + ۴$$

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ = ۱۱ \rightarrow x_۱ + y_۲ + ۲ + x_۳ + x_۴ + y_۵ + ۴ = ۱۱$$

$$\rightarrow x_۱ + y_۲ + x_۳ + x_۴ + y_۵ = ۵$$

تعداد جواب های صحیح نامنفی $\binom{۵+(۵-۱)}{۵-۱} = \binom{۹}{۴}$

ت : یعنی در معادله‌ی $x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ = ۱۱$ دو شرط $x_۳ = ۰$ و $x_۴ \geq ۵$ به همراه صحیح و نامنفی بودن دیگر متغیر های آن برقرار است.

$$x_۴ \geq ۵ \rightarrow \underbrace{x_۴ - ۵}_{y_۴} \geq ۰ \rightarrow x_۴ = y_۴ + ۵$$

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ = ۱۱ \xrightarrow{x_۳=۰} x_۱ + x_۲ + ۰ + y_۴ + ۵ + x_۵ = ۱۱$$

$$\rightarrow x_۱ + x_۲ + y_۴ + x_۵ = ۶$$

تعداد جواب های صحیح نامنفی $\binom{۶+(۴-۱)}{۴-۱} = \binom{۹}{۳}$

تمرین ۲۴ : در یک خوابگاه دانشجویی ، دانشجویان سال های اوّل تا چهارم اسکان داده شده اند.

الف : به چند طریق می توان یک دسته‌ی ۱۰ نفری از دانشجویان این خوابگـاه را بـرای نماینـدگی خوابگـاه انتخاب کرد.

ب : به چند طریق می توان، یک دسته‌ی ۱۰ نفری از دانشجویان این خوابگاه را برای نمایندگی انتخاب کـرد، به شرط اینکه حداقل شامل یک دانشجوی سال اوّل ، یک دانشجوی سال دوّم و دو دانشجوی سـال سـوّم و دو دانشجوی سال چهارم باشد.

حل :

الف : تعریف می کنیم که :

$x_i =$ تعداد دانشجویان سال i ام در بین ۱۰ نفر انتخابی ($۱ \leq i \leq ۴$)

لذا کافی است تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله‌ی زیر را تعیین کنیم.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

تعداد جواب های صحیح و نامنفی $= \binom{n+r-1}{r-1} = \binom{10+4-1}{4-1} = \binom{13}{3} = 286$

ب : $x_1 > 0$ و $x_2 > 0$ و $x_3 > 1$ و $x_4 > 1$

$$x_1 = y_1 + 1$$
$$x_2 = y_2 + 1$$
$$x_3 = y_3 + 2$$
$$x_4 = y_4 + 2$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \to (y_1+1) + (y_2+1) + (y_3+2) + (y_4+2) = 10$$

$$\to y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 4$$

تعداد جواب های صحیح و نامنفی $= \binom{n+r-1}{r-1} = \binom{4+4-1}{4-1} = \binom{7}{3} = 35$

تمرین ۲۵ : معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 = 15$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد، به شرط اینکه $x_1 > 4$ و $x_2 > 0$

حل :

$$x_1 = y_1 + 5$$
$$x_2 = y_2 + 1$$
$$x_3 = y_3$$

$$\to x_1 + x_2 + x_3 = 15 \to (y_1+5) + (y_2+1) + y_3 = 15 \to y_1 + y_2 + y_3 = 9$$

حال کافی است تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله‌ی زیر را تعیین کنیم.

$$y_1 + y_2 + y_3 = 9$$

تعداد جواب های صحیح و نامنفی $= \binom{n+r-1}{r-1} = \binom{9+3-1}{3-1} = \binom{11}{2} = 55$

تمرین ۲۶ : هفت کبوتر به چند طریق می توانند در سه لانه‌ی متمایز قرار گیرند، به طوری که هیچ لانه ای خالی نماند؟

حل :

روش اوّل: چون قرار است که هیچ لانه ای خالی نماند. لذا کافی است که تعداد جواب های طبیعی معادله-ی $x_1 + x_2 + x_3 = 7$ را تعیین کرد.

$$\binom{n-1}{r-1} = \binom{7-1}{3-1} = \binom{6}{2} = 15$$

روش دوّم : هفت کبوتر در ۳ لانه قرار می گیرند به طوری که در هر لانه لااقل یک کبوتر قرار گیرد. برای این منظور در هر خانه الزاماً یک کبوتر قرار می گیرد. پس :

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7 \xrightarrow{x_i \geq 1} (y_1 + 1) + (y_2 + 1) + (y_3 + 1) = 7$$

$$\rightarrow y_1 + y_2 + y_3 = 4$$

تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله‌ی فوق برابر است با

$$\binom{4+3-1}{3-1} = \binom{6}{2} = 15$$

تمرین۲۷ : تعداد جواب های صحیح و نامنفی نامعادله‌ی $8 \leq x_1 + x_2 + x_3 < 12$ را به دست آورید.

حل : کافی است که تعداد جواب های صحیح و نامنفی هر یک از معادلات زیر را تعیین کنیم.

$$x_1 + x_2 + x_3 = 8 \rightarrow \binom{8+3-1}{3-1} = 45$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 9 \rightarrow \binom{9+3-1}{3-1} = 55$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10 \rightarrow \binom{10+3-1}{3-1} = 66$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11 \rightarrow \binom{11+3-1}{3-1} = 78$$

تعداد جواب های صحیح و نامنفی $= 45 + 55 + 66 + 78 = 244$

تمرین۲۸ : تعداد جواب های صحیح و نامنفی نامعادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 \leq 10$ را به دست آورید.

حل : t را عددی فرض می کنیم که

$x_۱ + x_۲ + x_۳ + t = ۱۰$

تعداد جواب های صحیح و نامنفی $= \binom{n+r-۱}{r-۱} = \binom{۱۰+۴-۱}{۴-۱} = \binom{۱۳}{۳} = ۲۸۶$

تمرین۲۹ : تعداد جواب های طبیعی نامعادله‌ی $x_۱ + x_۲ + x_۳ \leq ۱۰$ را به دست آورید.

حل :

روش اوّل : کافی است تعداد جواب های طبیعی هر یک از معادلات زیر را جداگانه به دست آورده و سـپس با هم جمع کنیم.

$x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۱$

تعداد جواب های طبیعی $\rightarrow \binom{۱-۱}{۳-۱} = ۰$

$x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۲$

تعداد جواب های طبیعی $\rightarrow \binom{۲-۱}{۳-۱} = ۰$

$x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۳ \rightarrow \binom{۳-۱}{۳-۱} = ۱$

تعداد جواب های طبیعی $\rightarrow \binom{۳-۱}{۳-۱} = ۱$

$x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۴ \rightarrow \binom{۴-۱}{۳-۱} = ۳$

تعداد جواب های طبیعی $\rightarrow \binom{۴-۱}{۳-۱} = ۳$

$x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۵ \rightarrow \binom{۵-۱}{۳-۱} = ۶$

تعداد جواب های طبیعی $\rightarrow \binom{۵-۱}{۳-۱} = ۶$

$x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۶$

تعداد جواب های طبیعی $\rightarrow \binom{۶-۱}{۳-۱} = ۱۰$

$x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۷$

تعداد جواب های طبیعی $\rightarrow \binom{۷-۱}{۳-۱} = ۱۵$

$$x_1 + x_2 + x_3 = ۸ \to \binom{۸-۱}{۳-۱} = ۲۱$$

$$\text{تعداد جواب های طبیعی} \to \binom{۸-۱}{۳-۱} = ۲۱$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = ۹ \to \binom{۹-۱}{۳-۱} = ۲۸$$

$$\text{تعداد جواب های طبیعی} \to \binom{۹-۱}{۳-۱} = ۲۸$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = ۱۰ \to \binom{۱۰-۱}{۳-۱} = ۳۶$$

$$\text{تعداد جواب های طبیعی} \to \binom{۱۰-۱}{۳-۱} = ۳۶$$

لذا تعداد جواب های طبیعی می شود.

$$۰ + ۰ + ۱ + ۳ + ۶ + ۱۰ + ۱۵ + ۲۱ + ۲۸ + ۳۶ = ۱۲۰$$

روش دوّم : $t \geq ۰$ را عددی فرض می کنیم که

$$x_1 + x_2 + x_3 + t = ۱۰$$

$$\xrightarrow{t=y-۱} x_1 + x_2 + x_3 + y - ۱ = ۱۰ \to x_1 + x_2 + x_3 + y = ۱۱$$

$$\text{تعداد جواب های طبیعی} = \binom{n-۱}{r-۱} = \binom{۱۱-۱}{۴-۱} = \binom{۱۰}{۳} = ۱۲۰$$

تمرین ۳۰ : تعداد جواب های صحیح و نامنفی هر یک از معادلات زیر ، با شرط های داده شـده را تعیـین کنید.

الف) $x_1 + x_2 + ... + x_5 = ۱۰ \quad , \quad x_i > ۰ \, , \, ۲ \leq i \leq ۵$

ب) $x_1 + x_2 + ... + x_6 = ۱۲ \quad , \quad x_1 > ۲ \, , \, x_5 \geq ۴$

ت) $x_1 + ۳x_2 + x_3 + x_4 = ۷ \quad , \quad x_i \geq ۰ \, , \, ۱ < i < ۴$

ث) $x_1 + \sqrt{x_2} + x_3 + x_4 = ۳ \quad , \quad x_i \geq ۰ \, , \, ۱ < i < ۴$

حل :

الف :

$$x_i > ۰ \xrightarrow{۲<i<۵} x_i \geq ۱ \rightarrow \underbrace{x_i - ۱}_{y_i} \geq ۰ \rightarrow x_i = y_i + ۱$$

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ = ۱۰ \rightarrow x_۱ + y_۲ + ۱ + y_۳ + ۱ + y_۴ + ۱ + y_۵ + ۱ = ۱۰$$

$$\rightarrow x_۱ + y_۲ + y_۳ + y_۴ + y_۵ = ۶$$

تعداد جواب های صحیح نامنفی $\binom{۶+۵-۱}{۵-۱} = \binom{۱۰}{۴}$

ب :

$$x_۱ > ۲ \rightarrow x_۱ \geq ۳ \rightarrow \underbrace{x_۱ - ۳}_{y_۱} \geq ۰ \rightarrow x_۱ = y_۱ + ۳$$

$$x_۵ \geq ۴ \rightarrow \underbrace{x_۵ - ۴}_{y_۵} \geq ۰ \rightarrow x_۵ = y_۵ + ۴$$

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ + x_۶ = ۱۲ \rightarrow y_۱ + ۳ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + y_۵ + ۴ + x_۶ = ۱۲$$

$$\rightarrow y_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + y_۵ + x_۶ = ۵$$

تعداد جواب های صحیح نامنفی $\binom{۶+۵-۱}{۶-۱} = \binom{۱۰}{۵}$

ت : با توجه به ضریب $x_۲$، مسئله را برای ۳ حالت زیر حل می کنیم و حاصل جمع تعداد جواب ها را به دست می آوریم.

حالت اوّل $x_۲ = ۰ \rightarrow x_۱ + ۳(۰) + x_۳ + x_۴ = ۷ \rightarrow x_۱ + x_۳ + x_۴ = ۷$

تعداد جواب های صحیح نامنفی $\binom{۷+۳-۱}{۳-۱} = \binom{۹}{۲} = ۳۶$

حالت دوّم $x_۲ = ۱ \rightarrow x_۱ + ۳(۱) + x_۳ + x_۴ = ۷ \rightarrow x_۱ + x_۳ + x_۴ = ۴$

تعداد جواب های صحیح نامنفی $\binom{۴+۳-۱}{۳-۱} = \binom{۶}{۲} = ۱۵$

حالت سوّم $x_۲ = ۲ \rightarrow x_۱ + ۳(۲) + x_۳ + x_۴ = ۷ \rightarrow x_۱ + x_۳ + x_۴ = ۱$

تعداد جواب های صحیح نامنفی $\binom{۱+۳-۱}{۳-۱} = \binom{۳}{۲} = ۳$

تعداد کل جواب های صحیح نامنفی $= ۳۶ + ۱۵ + ۳ = ۵۴$

توجه کنید که مقدار $x_۲$ نمی تواند ۳ یا بیشتر باشد.

ث : با توجه به شرایط معادله، چهار حالت برای $x_۲$ وجود دارد.

حالت اوّل $x_۲ = ۰ \rightarrow x_۱ + \sqrt{۰} + x_۳ + x_۴ = ۳ \rightarrow x_۱ + x_۳ + x_۴ = ۳$

تعداد جواب های صحیح نامنفی $\binom{۳+۳-۱}{۳-۱} = \binom{۵}{۲} = ۱۰$

حالت دوّم $x_۲ = ۱ \rightarrow x_۱ + \sqrt{۱} + x_۳ + x_۴ = ۳ \rightarrow\rightarrow x_۱ + x_۳ + x_۴ = ۲$

تعداد جواب های صحیح نامنفی $\binom{۲+۳-۱}{۳-۱} = \binom{۴}{۲} = ۶$

حالت سوّم $x_۲ = ۴ \rightarrow x_۱ + \sqrt{۴} + x_۳ + x_۴ = ۳ \rightarrow x_۱ + x_۳ + x_۴ = ۱$

تعداد جواب های صحیح نامنفی $\binom{۱+۳-۱}{۳-۱} = \binom{۳}{۲} = ۳$

حالت چهارم $x_۲ = ۹ \rightarrow x_۱ + \sqrt{۹} + x_۳ + x_۴ = ۳ \rightarrow x_۱ + x_۳ + x_۴ = ۰$

تعداد جواب های صحیح نامنفی $\binom{۰+۳-۱}{۳-۱} = \binom{۲}{۲} = ۱$

تعداد کل جواب های صحیح نامنفی $= ۱۰ + ۶ + ۳ + ۱ = ۲۰$

توجه کنید که مقدار $x_۲$ باید مربع کامل بوده و نمی تواند ۱۶ یا بیشتر باشد.

تمرین ۳۱ : به چند طریق می توان ۵ توپ یکسان را بین ۳ نفر به دلخواه توزیع کرد؟

حل :

$x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۵ \qquad ; \qquad x_i \geq ۰$

تعداد جواب های صحیح نامنفی $= \binom{۵+۳-۱}{۳-۱} = \binom{۷}{۲} = ۲۱$

به ۲۱ طریق می توان ۵ توپ یکسان را بین ۳ نفر توزیع کرد.

تمرین ۳۲ : به چند طریق می توان ۸ توپ یکسان را بین ۴ نفر توزیع کرد، هرگاه بخواهیم هر نفر حداقل یک توپ داشته باشد؟

حل :

$x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ = ۸ \qquad ; \qquad x_i \geq ۱$

$$۳۵ = \binom{۷}{۳} = \binom{۸-۱}{۴-۱} = \text{تعداد جواب های صحیح و مثبت (طبیعی)}$$

به ۳۵ طریق می توان ۸ توپ یکسان را چنان توزیع کرد که به هر نفر حداقل یک توپ تعلق گیرد.

***

درس سوّم : روش هایی برای شمارش

در این درس به دو اصل کارآمد در شمارش، اشاره و کاربردهایی برای آنها بیان می کنیم.

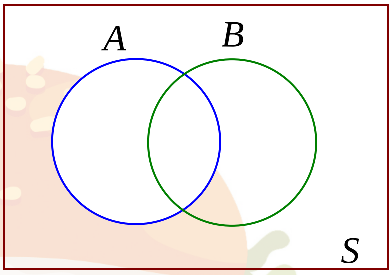
الف : اصل شمول و عدم شمول

اگر B و A دو زیر مجموعه از مجموعه‌ی مرجع S را در نظر بگیرید. در صورتی که B و A و S مجموعه های متناهی باشند. واضح است که روابط زیر را برای تعداد اعضای این مجموعه ها می توان نوشت[1].

الف) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

ب) $|A - B| = |A| - |A \cap B|$

ج) $|\overline{A}| = |S| - |A|$



نتیجه :

$$|\overline{A \cup B}| = |S| - |A \cup B|$$

مثال : در یک کلاس ۲۵ نفری، ۱۵ نفر فوتبال و ۱۴ نفر والیبال بازی می کنند. مشخص کنید چند نه فوتبال و نه والبیال بازی می کنند، هرگاه بدانیم که ۹ نفر هم فوتبال و هم والیبال بازی می کنند.

حل : اگر مجموعه‌ی دانش آموزانی که فوتبال بازی می کند را A و مجموعه‌ی دانش آموزانی که والیبال بازی می کند را B بنامیم. در این صورت تعداد دانش آموزانی که یا فوتبال یا والیبال بازی می کنند برابر :

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = ۱۵ + ۱۴ - ۹ = ۲۰$$

و تعداد دانش آموزانی که نه فوتبال و نه والیبال بازی می کنند برابر :

$$|\overline{A \cup B}| = |S| - |A \cup B| = ۲۵ - ۲۰ = ۵$$

مثال : با توجه به مثال فوق، تعیین کنید که چند نفر فقط فوتبال بازی می کنند.

حل :

$$|A - B| = |A| - |A \cap B| = ۱۵ - ۹ = ۶$$

[1] . در این کتاب، تعداد عضوهای مجموعه‌ی متناهی S را با نماد $|S|$ نمایش می دهیم. یعنی $n(S) = |S|$
همچنین متمم مجموعه‌ی A را با $\overline{A}$ نمایش می دهند. یعنی $A' = \overline{A}$

توجه : اگر A مجموعه‌ی اعداد طبیعی بخشپذیر بر k باشد و a اوّلین (کوچکترین) و b آخرین (بزرگتـرین) عضو مجموعه‌ی A باشند. در این صورت:

$$|A|=\frac{b-a}{k}+۱$$

مثال : تعداد اعداد طبیعی دو رقمی مضرب ۷ را تعیین کنید.

حل:

$$A=\{۱۴,۲۱,۲۸,...,۹۸\}\rightarrow|A|=\frac{۹۸-۱۴}{۷}+۱=۱۳$$

مثال : تعداد اعداد طبیعی دو رقمی را پیدا کنید که:

الف) مضرب ۳ باشند. ب) مضرب ۵ باشند.

پ) مضرب ۳ و مضرب ۵ باشند. ت) یا مضرب ۳ یا مضرب ۵ باشند.

ث) نه مضرب ۳ و نه مضرب ۵ باشند. ج) مضرب ۳ باشند ولی مضرب ۵ نباشند.

حل:

اعداد طبیعی دو رقمی $S=\{۱۰,۱۱,۱۲,...,۹۹\}\rightarrow|S|=۹۹-۱۰+۱=۹۰$

مجموعه‌ی مضرب های ۳ $A=\{۱۲,۱۵,۱۸,...,۹۹\}\rightarrow|A|=\frac{۹۹-۱۲}{۳}+۱=۳۰$

مجموعه‌ی مضرب های ۵ $B=\{۱۰,۱۵,۲۰,...,۹۵\}\rightarrow|B|=\frac{۹۵-۱۰}{۵}+۱=۱۸$

مجموعه‌ی مضرب های ۳ و ۵ $A\bigcap B=\{۱۵,۳۰,۴۵,...,۹۰\}$

(مجموعه‌ی مضرب های ۱۵ چون ۳ و ۵ متباین هستند.)

$$\rightarrow|A\bigcap B|=\frac{۹۰-۱۵}{۱۵}+۱=۶$$

تعداد اعداد مضرب ۳ یا مضرب ۵ $|A\bigcup B|=|A|+|B|-|A\bigcap B|=۳۰+۱۸-۶=۴۲$

تعداد اعداد نه مضرب۳ و نه مضرب ۵ $|\overline{A\bigcup B}|=|S|-|A\bigcup B|=۹۰-۴۲=۴۸$

تعداد اعدادی که مضرب ۳ باشند ولی مضرب ۵ نباشند.$=|A-B|=|A|-|A\bigcap B|=۳۰-۶=۲۴$

توجه : برای تعیین تعداد اعداد طبیعی ابتدا از یک تا عدد m ($۱\leq n\leq m$) و بخش پذیر بر k می توان از فرمول زیر نیز استفاده کرد.

$$n=\left[\frac{m}{k}\right]$$

مثال : تعداد اعداد طبیعی کمتر از صد و مضرب ۷ را تعیین کنید.

حل:

$$A=\{n \mid ۱\leq n\leq ۱۰۰, ۷\mid n\}=\{۷,۱۴,۲۱,۲۸,...,۹۸\}\rightarrow |A|=\left[\frac{۱۰۰}{۷}\right]=[۱۴/۲۸]=۱۴$$

***

تمرین: تعداد اعداد صحیح و مثبت کوچکتر از ۵۰۰ که نسبت به ۵۰۰ اوّلند را محاسبه کنید.

حل:

$$S=\{۱,۲,۳,...,۵۰۰\}\rightarrow |S|=۵۰۰-۱+۱=۵۰۰$$

$$۵۰۰=۵^{۳}\times ۲^{۲}$$

حال تعداد اعدادی از مجموعه‌ی S را بدست می آوریم که بر۲ یا ۵ بخش پذیر نباشند.

اعضای S که بر ۲ بخش پذیر باشند.

$$|A|=\{۲,۴,۶,...,۵۰۰\}\rightarrow |A|=\frac{۵۰۰-۲}{۲}+۱=۲۵۰$$

اعضای S که بر ۵ بخش پذیر باشند.

$$|B|=\{۵,۱۰,۱۵,...,۵۰۰\}\rightarrow |B|=\frac{۵۰۰-۵}{۵}+۱=۱۰۰$$

اعضای S که بر ۱۰ بخش پذیر باشند. (۲و۵ نسبت به هم اولند)

$$A\bigcap B=\{۱۰,۲۰,۳۰,...,۵۰۰\}\rightarrow |A\bigcap B|=\frac{۵۰۰-۱۰}{۱۰}+۱=۵۰$$

تعداد اعضای S که یا بر۲ و یا بر ۵ بخش پذیر باشند.

$$|A\bigcup B|=|A|+|B|-|A\bigcap B|=۲۵۰+۱۰۰-۵۰=۳۰۰$$

تعداد اعضای S که نه بر۲ و نه بر ۵ بخش پذیر باشند.

$$|\overline{A\bigcup B}|=|S|-|A\bigcup B|=۵۰۰-۳۰۰=۲۰۰$$

***

مثال : اگر یک قفل رمز دارد شامل ۴ رقم از صفر تا ۹ باشد و بدانیم که رمز بسته شده روی قفل حداقل یک رقم ۷ و یک رقم ۸ را شامل شود و امتحان کردن هر رمز ۴ رقمی ۵ ثانیه طول بکشد. حداکثر چه زمانی لازم است تا این قفل باز شود. (توجه: در رمز ، رقم صفر می تواند در سمت چپ باشد.)

حل :

$S \rightarrow |S| = ۱۰\times۱۰\times۱۰\times۱۰ = ۱۰۰۰۰$ = تعداد کل رمز های چهار رقمی

$A \rightarrow |A| = ۹\times۹\times۹\times۹$ = مجموعه‌ی رمزهای چهار رقمی فاقد ۷

$B \rightarrow |B| = ۹\times۹\times۹\times۹$ = مجموعه‌ی رمزهای چهار رقمی فاقد ۸

$A \cap B \rightarrow |A \cap B| = ۸\times۸\times۸\times۸$ = مجموعه‌ی رمزهای چهار رقمی فاقد۷ و ۸

$A \cup B$ = مجموعه‌ی رمز های چهار رقمی یا فاقد ۷ یا فاقد ۸ یا فاقد هر دو

$\rightarrow |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = ۶۵۶۱ + ۶۵۶۱ - ۴۰۹۶ = ۹۰۲۶$

تعداد رمز های شامل ۷ و ۸ $= |S| - |A \cup B| = ۱۰۰۰۰ - ۹۰۲۶ = ۹۷۴$

$= ۹۷۴ \times ۵ = ۴۸۷۰$ حداکثر زمان لازم بر حسب ثانیه برای باز کردن قفل

مثال : چند عدد سه رقمی وجود دارد که در آنها هر یک از ارقام ۳ و ۶ ، حداقل یک بار ظاهر شوند؟

حل :

تعداد کل اعداد سه رقمی $|S| = ۹\times۱۰\times۱۰ = ۹۰۰$

تعداد اعداد سه رقمی فاقد ۳ $|A| = ۸\times۹\times۹ = ۶۴۸$

تعداد اعداد سه رقمی فاقد ۶ $|B| = ۸\times۹\times۹ = ۶۴۸$

تعداد اعداد سه رقمی فاقد هر دو عدد ۳و ۶ $= |A \cap B| = ۷\times۸\times۸ = ۴۴۸$

تعداد اعداد سه رقمی فاقد۳ یا ۶ یا هر دو $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = ۶۴۸ + ۶۴۸ - ۴۴۸ = ۸۴۸$

تعداد اعداد سه رقمی که در آنها ۳ یا ۶ حداقل یک بار ظاهر شوند. $|S| - |A \cup B| = ۹۰۰ - ۸۴۸ = ۵۲$

***

تمرین برای حل :

۱ : در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۹۰ ($۱ \le n \le ۹۰$) چند عدد وجود دارد که بر ۲ یا ۳ بخش پذیر باشند؟

۲ : در بین اعداد طبیعی۱ تا ۲۰۰ ($۱ \le n \le ۲۰۰$) چند عدد وجود دارد که بر ۴ بخش پذیر باشند ولی بـر۷ بخش پذیر نباشند؟

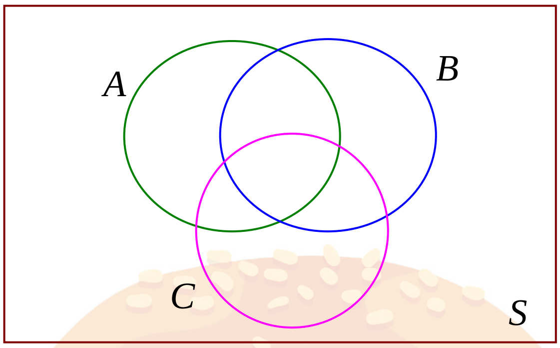
۳ : تعداد اعداد صحیح و مثبت کوچکتر از ۱۱۲۵ که نسبت به ۱۱۲۵ اوّلند را محاسبه کنید.

تعمیم اصل شمول و عدم شمول

برای سه مجموعه‌ی متناهی C و B و A اصل شمول و عدم شمول را می توان به شکل زیر نوشت:

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$$

$$|\overline{A\cup B\cup C}|=|S|-|A\cup B\cup C|$$



مثال : چند عدد طبیعی مانند n به طوری که $۱\leq n\leq ۴۰۰$ ، وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۳ و ۴ و ۵ بخش پذیر نباشند.

حل :

$$S=\{۱,۲,۳,...,۴۰۰\}\to|S|=۴۰۰-۱+۱=۴۰۰$$

حال تعداد اعدادی از مجموعه‌ی S را بدست می آوریم که بر۳ یا ۴ یا ۵ بخش پذیر نباشند.

اعضای S که بر ۳ بخش پذیر باشند.

$$|A|=\{۱,۲,۳,...,۴۰۰\}\to|A|=\left[\frac{۴۰۰}{۳}\right]=۱۳۳$$

اعضای S که بر ۴ بخش پذیر باشند.

$$|B|=\{۱,۲,۳,...,۴۰۰\}\to|B|=\left[\frac{۴۰۰}{۴}\right]=۱۰۰$$

اعضای S که بر ۵ بخش پذیر باشند.

$$|C|=\{۱,۲,۳,...,۴۰۰\}\to|C|=\left[\frac{۴۰۰}{۵}\right]=۸۰$$

اعضای S که بر ۳ و ۴ (یعنی ۱۲) بخش پذیر باشند. (۳و۴ نسبت به هم اولند.)

$$A\bigcap B=\{۱,۲,۳,\dots,۴۰۰\}\rightarrow |A\bigcap B|=\left[\frac{۴۰۰}{۱۲}\right]=۳۳$$

اعضای S که بر ۳ و ۵ (یعنی ۱۵) بخش پذیر باشند. (۳و۵ نسبت به هم اولند.)

$$A\bigcap C=\{۱,۲,۳,\dots,۴۰۰\}\rightarrow |A\bigcap C|=\left[\frac{۴۰۰}{۱۵}\right]=۲۶$$

اعضای S که بر ۴ و ۵ (یعنی ۲۰) بخش پذیر باشند. (۴و۵ نسبت به هم اولند.)

$$B\bigcap C=\{۱,۲,۳,\dots,۴۰۰\}\rightarrow |B\bigcap C|=\left[\frac{۴۰۰}{۲۰}\right]=۲۰$$

اعضای S که بر ۳ و ۴ و ۵ (یعنی ۶۰) بخش پذیر باشند. (۳و ۴و ۵ نسبت به هم اولند.)

$$A\bigcap B\bigcap C=\{۱,۲,۳,\dots,۴۰۰\}\rightarrow |A\bigcap B\bigcap C|=\left[\frac{۴۰۰}{۶۰}\right]=۶$$

تعداد اعضای S که یا بر۳ و یا بر ۴ یا بر ۵ بخش پذیر باشند.

$$|A\bigcup B\bigcup C|=|A|+|B|+|C|-|A\bigcap B|-|A\bigcap C|-|B\bigcap C|+|A\bigcap B\bigcap C|$$

$$=۱۳۳+۱۰۰+۸۰-۳۳-۲۶-۲۰+۶=۲۴۰$$

تعداد اعضای S که نه بر۳ و نه بر۴ و نه بر ۵ بخش پذیر باشند.

$$|\overline{A\bigcup B\bigcap C}|=|S|-|A\bigcup B\bigcup C|=۴۰۰-۲۴۰=۱۶۰$$

***

مثال : تعداد اعداد صحیح و مثبت کوچکتر از ۳۰ که نسبت به ۳۰ اوّلند را محاسبه کنید.

حل:

$$S=\{۱,۲,۳,\dots,۳۰\}\rightarrow |S|=۳۰-۱+۱=۳۰$$

$$۳۰=۲\times ۳\times ۵$$

حال تعداد اعدادی از مجموعه‌ی S را بدست می آوریم که بر۲ یا ۳ یا ۵ بخش پذیر نباشند.

اعضای S که بر ۲ بخش پذیر باشند.

$$|A|=\{۲,۴,۶,\dots,۳۰\}\rightarrow |A|=\frac{۳۰-۲}{۲}+۱=۱۵$$

اعضای S که بر ۳ بخش پذیر باشند.

$$|B|=\{۳,۶,...,۳۰\}\rightarrow|B|=\frac{۳۰-۳}{۳}+۱=۱۰$$

اعضای S که بر ۵ بخش پذیر باشند.

$$|C|=\{۵,۱۰,۱۵,...,۳۰\}\rightarrow|B|=\frac{۳۰-۵}{۵}+۱=۶$$

اعضای S که بر۶ بخش پذیر باشند. (۲و۳ نسبت به هم اوّلند.)

$$A\cap B=\{۶,۱۲,\ ...,۳۰\}\rightarrow|A\cap B|=\frac{۳۰-۶}{۶}+۱=۵$$

اعضای S که بر ۱۰ بخش پذیر باشند. (۲و۵ نسبت به هم اوّلند.)

$$A\cap C=\{۱۰,۲۰,۳۰\}\rightarrow|A\cap C|=۳$$

اعضای S که بر۱۵ بخش پذیر باشند. (۳و۵ نسبت به هم اوّلند.)

$$B\cap C=\{۱۵,۳۰\}\rightarrow|B\cap C|=۲$$

اعضای S که بر۳۰ بخش پذیر باشند. (۲و۳و۵ نسبت به هم اوّلند.)

$$A\cap B\cap C=\{۳۰\}\rightarrow|A\cap B\cap C|=۱$$

تعداد اعضای S که یا بر۲ و یا بر ۳ و یا بر ۵ بخش پذیر باشند.

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$$

$$=۱۵+۱۰+۶-۵-۳-۲+۱=۲۲$$

تعداد اعضای S که نه بر۲ و نه بر ۳ و نه بر ۵ بخش پذیر باشند.

$$|\overline{A\cup B\cup C}|=|S|-|A\cup B\cup C|=۳۰-۲۲=۸$$

***

مثال : تعداد شماره های ۵ رقمی که در آنها هر یک از ارقام ۱و ۳و ۷ حداقل یک بار ظاهر شده باشد. (فقط با ارقام ۱ و ۳ و ۷)

حل : مجموعه‌ی S را کلیه‌ی شماره های ۵ رقمی قرار می دهیم.

$$۳\times۳\times۳\times۳\times۳\rightarrow|S|=۳^۵=۲۴۳$$

مجموعه‌ی شماره هایی که فاقد رقم ۱ می باشند. $A=$

$۲\times۲\times۲\times۲\times۲ \rightarrow |A|=۲^۵=۳۲$

مجموعه‌ی شماره هایی که فاقد رقم ۳ می باشند. $B=$

$۲\times۲\times۲\times۲\times۲ \rightarrow |B|=۲^۵=۳۲$

مجموعه‌ی شماره هایی که فاقد رقم ۷ می باشند. $C=$

$۲\times۲\times۲\times۲\times۲ \rightarrow |C|=۲^۵=۳۲$

مجموعه‌ی شماره هایی که فاقد ارقام ۱و ۳ می باشند. $A\cap B=$

$۱\times۱\times۱\times۱\times۱ \rightarrow |A\cap B|=۱^۵=۱$

مجموعه‌ی شماره هایی که فاقد ارقام ۱و ۷ می باشند. $A\cap C=$

$۱\times۱\times۱\times۱\times۱ \rightarrow |A\cap C|=۱^۵=۱$

مجموعه‌ی شماره هایی که فاقد ارقام ۳و ۷ می باشند. $B\cap C=$

$۱\times۱\times۱\times۱\times۱ \rightarrow |B\cap C|=۱^۵=۱$

مجموعه‌ی شماره هایی که فاقد ارقام۱ و ۳ و ۷ می باشند. $A\cap B\cap C=$

$۰\times۰\times۰\times۰\times۰ \rightarrow |A\cap B\cap C|=۰$

لذا طبق اصل شمول و عدم شمول می توان تعداد شماره های فاقد ارقام ۱ یا ۳ یا ۷ را به شکل زیر به دست آورد.

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$$

$$=۳۲+۳۲+۳۲-۱-۱-۱+۰=۹۳$$

پس تعداد لذا طبق اصل شمول و عدم شمول می توان تعداد شماره های شامل ارقام ۱ یا ۳ یا ۷ را به شکل زیر به دست آورد.

$$|\overline{A\cup B\cup C}|=|S|-|A\cup B\cup C|=۲۴۳-۹۳=۱۵۰$$

***

مثال : تعداد شماره های ۵ رقمی که در آنها هر یک از ارقام ۱و ۳و ۷ حداقل یک بار ظاهر شده باشد. (ارقام غیر از ۱ و ۳ و ۷ می توانند باشند.)

حل : مجموعه‌ی S را کلیه‌ی شماره های ۵ رقمی قرار می دهیم. (سمت چپ صفر مجاز نمی باشد.)

$$۹\times۱۰\times۱۰\times۱۰\times۱۰ \to |S| = ۹\times۱۰^۴$$

مجموعه‌ی شماره هایی که فاقد رقم ۱ می باشند. $=A$

$$۸\times۹\times۹\times۹\times۹ \to |A| = ۸\times۹^۴$$

مجموعه‌ی شماره هایی که فاقد رقم ۳ می باشند. $=B$

$$۸\times۹\times۹\times۹\times۹ \to |B| = ۸\times۹^۴$$

مجموعه‌ی شماره هایی که فاقد رقم ۷ می باشند. $=C$

$$۸\times۹\times۹\times۹\times۹ \to |C| = ۸\times۹^۴$$

مجموعه‌ی شماره هایی که فاقد ارقام ۱ و ۳ می باشند. $=A\cap B$

$$۷\times۸\times۸\times۸\times۸ \to |A\cap B| = ۷\times۸^۴$$

مجموعه‌ی شماره هایی که فاقد ارقام ۱ و ۷ می باشند. $=A\cap C$

$$۷\times۸\times۸\times۸\times۸ \to |A\cap C| = ۷\times۸^۴$$

مجموعه‌ی شماره هایی که فاقد ارقام ۳ و ۷ می باشند. $=B\cap C$

$$۷\times۸\times۸\times۸\times۸ \to |B\cap C| = ۷\times۸^۴$$

مجموعه‌ی شماره هایی که فاقد ارقام۱ و ۳ و ۷ می باشند. $=A\cap B\cap C$

$$۶\times۷\times۷\times۷\times۷ \to |A\cap B\cap C| = ۶\times۷^۴$$

لذا طبق اصل شمول و عدم شمول می توان تعداد شماره های فاقد ارقام ۱ یا ۳ یا ۷ را به شکل زیر به دست آورد.

$$|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$$

$$= ۳(۸\times۹^۴) - ۳(۷\times۸^۴) + ۶\times۷^۴$$

پس تعداد لذا طبق اصل شمول و عدم شمول می توان تعداد شماره های شامل ارقام ۱ یا ۳ یا ۷ را به شکل زیر به دست آورد.

$$|\overline{A\cup B\cup C}| = |S| - |A\cup B\cup C| = ۹\times۱۰^۴ - ۳(۸\times۹^۴) + ۳(۷\times۸^۴) - ۶\times۷^۴$$

***

تعیین تعداد توابع

تعداد توابع ممکن از یک مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B با فرض اینکه $|A|=m$ و $|B|=n$ برابر است با:

$$n^m$$

مثال : تعداد تابع های ممکن از یک مجموعه‌ی ۳ عضوی به یک مجموعه‌ی ۵ عضوی را به دست آورید.

حل :

$$۵^۳=۱۲۵$$

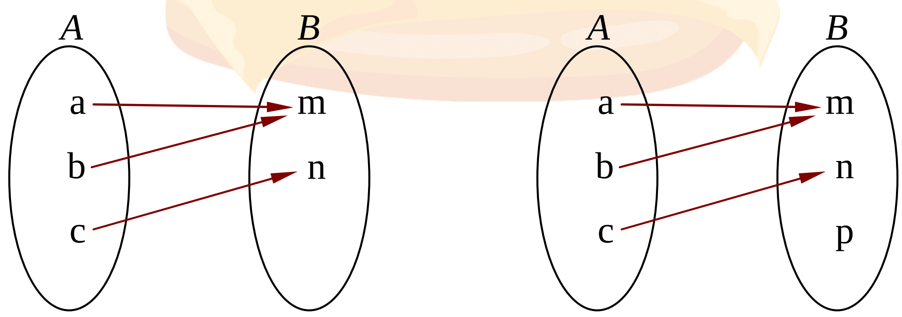
مثال : ۸ نفر را که برای برنامه‌ی تلویزیونی پیامک ارسال کرده اند، انتخاب کـرده ایـم و مـی خـواهیم در ۴ مرحله‌ی در هر مرحله یک جایزه را به یکی از این ۸ نفر (با قرئه کشی) به دلخواه بدهیم. این عمل بـه چنـد طریق امکان پذیر است؟ (یک نفر می تواند ۴ جایزه را برنده شود.)

حل : این مثال معادل است با یافتن تعداد تابع های ممکن از یک مجموعه‌ی ۴ عضوی به یک مجموعه‌ی ۸ عضوی می باشد و جواب می شود.

$$۸^۴=۴۰۹۶$$

تعیین تعداد توابع پوشا

تعریف تابع پوشا : اگر f تابعی باشد که از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B تعریف شود، گویند این تـابع پوشا است، هرگاه روی تمام اعضای B، پیکانی رسم شده است. به عبارت دیگر $R_f=B$



(الف) (ب)

برای مثال در دو نمودار فوق، تابع الف ، پوشا است ولی تابع ب پوشا نمی باشد.

مثال: تعداد توابع پوشا از یک مجموعه‌ی ۴ عضوی A به یک مجموعه‌ی۳ عضوی B را پیدا کنید.

حل: گیریم که $f:A\to B$

$$A=\{a_۱,a_۲,a_۳,a_۴\} \qquad (m=۴)$$

$$B=\{b_۱,b_۲,b_۳\} \qquad (n=۳)$$

اگر مجموعه‌ی S مجموعه‌ی توابعی باشد که از A به B تعریف شده اند. لذا داریم:

$$|S|=n^m=۳^۴=۳\times۳\times۳\times۳=۸۱$$

حال فرض کنید که B_i مجموعه‌ی توابعی باشند که هیچ عضوی از A را به b_i نسبت نمی دهند. (غیر پوشا)

$$B_i=\{f\in S\,|\,b_i\notin f(A)\} \qquad i=۱,۲,۳$$

$$B_۱=\{f\in S\,|\,b_۱\notin f(A)\}\to|A_۱|=(n-۱)^m=۲^۴$$

$$B_۲=\{f\in S\,|\,b_۲\notin f(A)\}\to|A_۲|=(n-۱)^m=۲^۴$$

$$B_۳=\{f\in S\,|\,b_۳\notin f(A)\}\to|A_۳|=(n-۱)^m=۲^۴$$

همچنین

$$|B_۱\cap B_۲|=|B_۱\cap B_۳|=|B_۲\cap B_۳|=(n-۲)^m=۱^۴=۱$$

و

$$|B_۱\cap B_۲\cap B_۳|=(n-۳)^m=۰^۴=۰$$

تعداد توابع غیر پوشا

$$|B_۱\cup B_۲\cup B_۳|$$
$$=|B_۱|+|B_۲|+|B_۳|-|B_۱\cap B_۲|-|B_۱\cap B_۳|-|B_۲\cap B_۳|+|B_۱\cap B_۲\cap B_۳|$$
$$=۲^۴+۲^۴+۲^۴-۱^۴-۱^۴-۱^۴+۰^۴=۴۵$$

تعداد توابع پوشا از A به B

$$|\overline{B_۱\cup B_۲\cup B_۳}|=|M|-|B_۱\cup B_۲\cup B_۳|=۸۱-۴۵=۳۶$$

***

مثال : تعداد توابع پوشا از یک مجموعه‌ی ۵ عضوی A به یک مجموعه‌ی ۳ عضوی B را پیدا کنید.

حل: اگر مجموعه‌ی S مجموعه‌ی توابعی باشد که از A به B تعریف شده اند. لذا داریم:

$$|S|=n^m=۳^۵=۲۴۳$$

تعداد توابع غیر پوشا از A به B

$$|B_۱|=|B_۲|=|B_۳|=(n-۱)^m=۲^۵=۳۲$$

همچنین

$$|B_۱\cap B_۲|=|B_۱\cap B_۳|=|B_۲\cap B_۳|=(n-۲)^m=۱^۵=۱$$

و

$$|B_۱\cap B_۲\cap B_۳|=(n-۳)^m=۰^۵=۰$$

تعداد توابع غیر پوشا

$$|B_۱\cup B_۲\cup B_۳|$$
$$=|B_۱|+|B_۲|+|B_۳|-|B_۱\cap B_۲|-|B_۱\cap B_۳|-|B_۲\cap B_۳|+|B_۱\cap B_۲\cap B_۳|$$
$$=۲^۵+۲^۵+۲^۵-۱^۵-۱^۵-۱^۵+۰^۵=۹۳$$

تعداد توابع پوشا از A به B

$$|\overline{B_۱\cup B_۲\cup B_۳}|=|M|-|B_۱\cup B_۲\cup B_۳|=۲۴۳-۹۳=۱۵۰$$

***

تذکر : تعداد تابع هایی چون $f:A\to B$ با فرض $|A|=m\geq ۳$ و $|B|=۳$ به طوری کـه $R_f=B$ (توابع پوشا) از رابطه‌ی $۳^m-۳(۲^m-۱)$ بدست می آید. چرا؟

مثال : به چند طریق می توان ۴ خودکار متفاوت را بین سه نفر توزیع کرد به شرط اینکـه بـه هـر نفـر یـک خودکار داده باشیم؟

حل : تعداد حالت های ممکن برای انجام این عمل، معادل اسـت بـا پیـدا کـردن تعـداد تـابع هـای از یـک مجموعه‌ی ۴ عضوی مانند A به یک مجموعه‌ی سه عضوی مانند B است. طوری که برد این توابـع همـه اعضای B باشند. (به هر عضو حداقل یک عضو از A نسبت داده شود.)

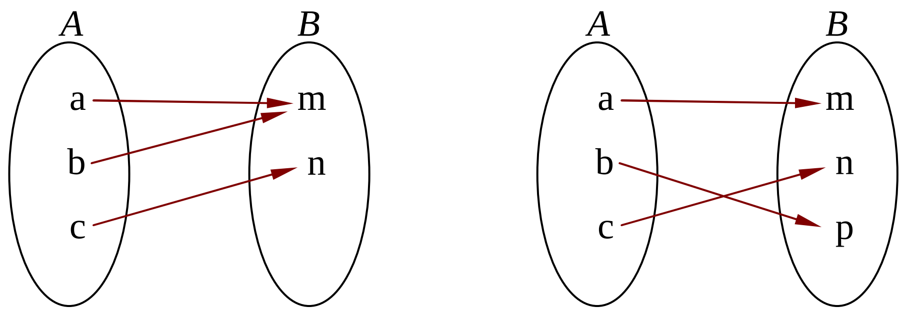
پس جواب این مسئله می شود:

$|A|=۴$ و $|B|=۳$

$$۳^m-۳(۲^m-۱)=۳^۴-۳(۲^۴-۱)=۸۱-۳(۱۶-۱)=۸۱-۴۵=۳۶$$

تعیین تعداد توابع یک به یک

تعریف تابع یک به یک : اگر f تابعی باشد که از مجموعه‌ی A به مجموعه‌ی B تعریف شود، گویند این تابع یک به یک است، هرگاه از عضو A فقط یک عضو از B نظیر شود.



(ب) (الف)

برای مثال در دو نمودار فوق، تابع الف ، یک به یک نیست ولی تابع ب یک به یک است.

مثال: تعداد توابع یک به یک از یک مجموعه‌ی ۴ عضوی به یک مجموعه‌ی ۶ عضوی را پیدا کنید.

حل: فرض کنیم که $f:A\to B$ و $A=\{a_۱,a_۲,a_۳,a_۴\}$ و $B=\{b_۱,b_۲,b_۳,b_۴,b_۵,b_۶\}$

برای تعریف f روی عضو اوّل A مثلاً $f(a_۱)$ ، به تعداد ۶ طریق وجود دارد. امّا برای تعریف f روی هر عضو دوّم A مثلاً $f(a_۲)$ ، با توجه به یک به یک بودن تابع ، به تعداد ۵ طریق وجود دارد. برای تعریف f روی هر عضو سوّم A مثلاً $f(a_۳)$ ، با توجه به یک به یک بودن تابع ، به تعداد ۴ طریق وجود دارد. به همین ترتیب می توان گفت که برای تعریف f روی هر عضو چهارم A مثلاً $f(a_۴)$ ، با توجه به یک به یک بودن تابع ، به تعداد ۳ طریق وجود دارد.

اکنون با توجه به اصل ضرب می توان گفت که به تعداد $۶\times۵\times۴\times۳$ یا $P(۶,۴)$ تابع یک به یک وجود دارد.

نتیجه : تعداد یک به یک از یک مجموعه‌ی m عضوی به یک مجموعه‌ی k عضوی، با شرط $k\geq m$ را برابر $P(k,m)=(k)_m=\dfrac{k!}{(k-m)!}$ تابع یک به یک وجود دارد.

مثال : به چند طریق می توان ۴ خودکار متفاوت را بین ۸ نفر توزیع کرد به شرط آنکه هیچ کس بیشتر از یک خودکار نداشته باشد.(به هر نفر حداکثر یک خودکار داده باشیم.)

حل : تعداد حالت های ممکن برای انجام این عمل، معادل است با پیداکردن تعداد تابع های یک بـه یـک از مجموعه ای ۴ عضوی به مجموعه ای ۸ عضوی است. یعنی

$$(۸)_۴ = \frac{۸!}{(۸-۴)!} = \frac{۸!}{۴!} = \frac{۸\times۷\times۶\times۵\times۴!}{۴!} = ۱۶۸۰$$

مثال : به چند طریق می توان ۵ کتاب را بین ۸ نفر توزیع کرد، اگر بخواهیم به هر نفر حـداکثر یـک کتـاب بدهیم.

حل : تعداد جواب های این مسئله برابر است با تعداد توابع یک به یک از یک مجموعـه‌ی ۵ عـضو بـه یـک مجموعه‌ی ۸ عضوی می باشد.

$$(۸)_۵ = \frac{۸!}{(۸-۵)!} = \frac{۸!}{۳!} = \frac{۸\times۷\times۶\times۵\times۴\times۳!}{۳!} = ۶۷۲۰$$

روش دوّم :

$۸\times۷\times۶\times۵\times۴ = ۶۷۲۰$ = تعداد حالات انتخاب ۵ کتاب توسط ۸ نفر

***

تعیین جواب های صحیح و نامنفی یک معادله‌ی سیاله با ضرایب واحد

مثال : تعداد جواب های صحیح و نامنفی معادله‌ی زیر را با شرط $۰ \le x_i \le ۲$ برای $۱ \le i \le ۳$ تعیین کنید.

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۵$$

حل :

$x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۵ \to |S| = \binom{۵+۳-۱}{۳-۱} = \binom{۷}{۲} = ۲۱$ تعداد کل جواب ها

$A_i = \{$جواب هایی از معادله که در آنها $x_i \ge ۳$ است.$\}$

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۵ \xrightarrow{x_۱ \ge ۳ \to x_۱ = x'_۱ + ۳ \ge ۲} x'_۱ + x_۲ + x_۳ = ۲$$

$$|A_۱| = |A_۲| = |A_۳| = \binom{۲+۳-۱}{۳-۱} = \binom{۴}{۲} = ۶$$

$x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۵ \xrightarrow{x_۱ \ge ۳ \ ,\ x_۲ \ge ۳} x'_۱ + x'_۲ + x_۳ = -۱$ چنین جوابی وجود ندارد.

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 0$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3|$$
$$= |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$
$$= 6 + 6 + 6 - 0 - 0 - 0 + 0 = 18$$

$$|\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}| = |M| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 21 - 18 = 3$$

***

تمرین برای حل :

۴ : اصل شمول و عدم شمول را برای چهار مجموعه‌ی متناهی بنویسید.

۵ : چند عدد طبیعی مانند n ، به طوری که $1 \le n \le 350$ وجود دارد که بر هیچ یک از اعداد ۴ و ۵ و ۶ بخش پذیر نباشند.

(توجه : $[5,6] = 30$ و $[4,6] = 12$ و $[4,5] = 20$ و $[5,4,6] = 60$)

۶ : در شهری سه روستا به نام های C و B و A وجود دارد. تعیین کنید که به چند طریق می توان راه هایی بین این سه روستا طراحی کرد که هیچ روستایی تنها نماند. (حداقل به یک روستای دیگر وصل باشد.)
راهنمایی : روستا ها را رأس گراف و جاده ها را یال فرض کنید. تعداد کل گراف های ساده با سه رأس برابر تعداد اعضای مجموعه‌ی S است.

۷ : چه تعداد تابع چون $f : A \to B$ می توان تعریف کرد، اگر بدانیم $|A| = 5$ و $|B| = 4$ است؟ چه تعداد از این توابع یک به یک هستند؟

۸ : به چند طریق می توان ۶ فیلم سینمایی را بین سه داور برای داوری تقسیم کرد، به طوری که هر داور حداقل یک فیلم را داور کند؟ (راهنمایی : تعیین تعداد توابع پوشا از یک مجموعه‌ی ۶ عضوی به یک مجموعه‌ی ۳ عضوی)

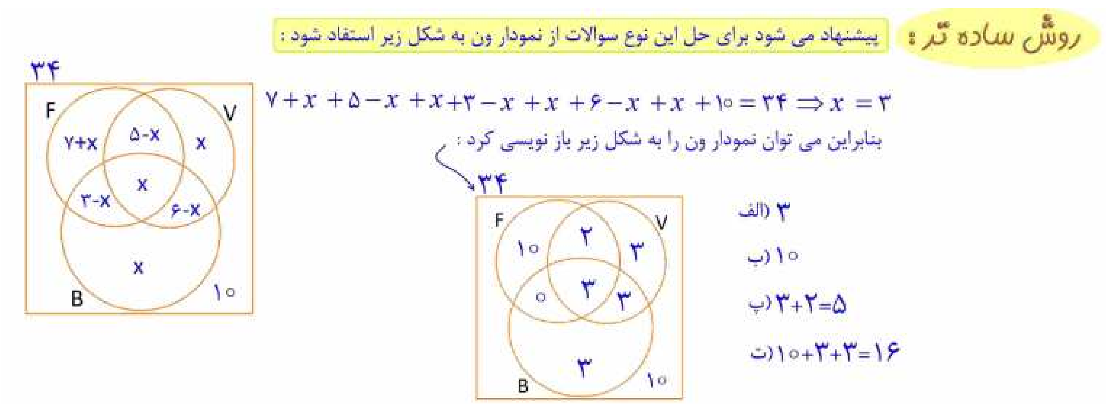
۹ : در یک کلاس ۳۴ نفری، ۱۵ نفر فوتبال بازمی می کنند، ۱۱ نفر والیبال و ۹ نفر بسکتبال بازی می کنند. اگر بدانیم ۱۰ نفر عضو هیچ یک از این سه تیم نبوده و ۵ نفر فوتبال و والیبال، ۶ نفر والیبال و بسکتبال و ۳ نفر فوتبال و بسکتبال بازی می کنند، مشخص کنید:

الف: چند نفر هر سه رشته‌ی ورزشی را بازی می کنند؟ (جواب: ۳)

ب : چند نفر فقط فوتبال بازی می کنند؟(جواب: ۱۰)

پ : چند نفر والیبال بازی می کنند ولی بسکتبال بازی نمی کنند؟(جواب : ۵)

ت : چند نفر فقط در یک رشته بازی می کنند؟ (جواب: ۱۶)



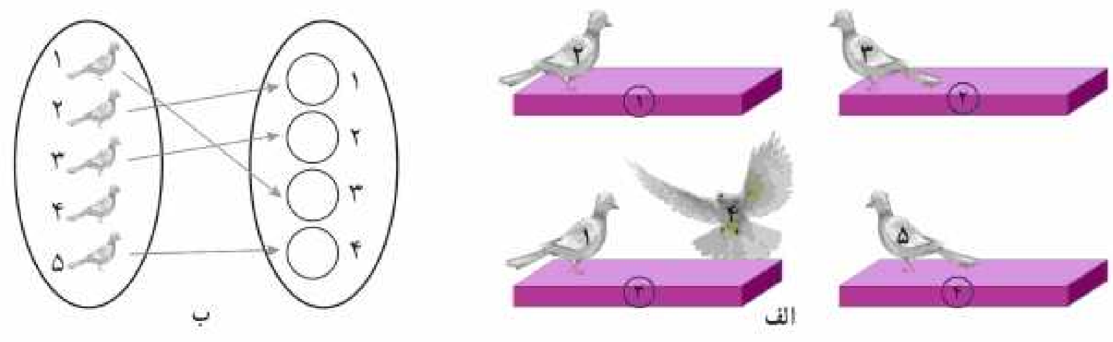
۱۰ : اگر بخواهیم یک قفل دارای رمز ۵ رقمی و فاقد صفر، که سه رقم آن ۷ و ۳ و ۲ هستند را باز کنیم و تمام اعداد ۵ رقمی را که شامل یک رقم ۷ و یک رقم ۲ و یک رقم ۳ هستند، در اختیار داریم و بستن و امتحان کردن هر یک از این اعداد ۵ رقمی، ۶ ثانیه طول بکشد، حساب کنید که برای باز کردن این قفل حداکثر چقدر زمان نیاز داریم. (جواب : ۲۰۳۴۰ ثانیه)

***

ب : اصل لانه کبوتری(اصل حجره ها)

یکی دیگر از اصول مهم در ریاضیات که در حل بسیاری از مسائل کار برد دارد اصل لانه کبوتری یا اصل دیریکله است. این اصل به صورت زیر است.

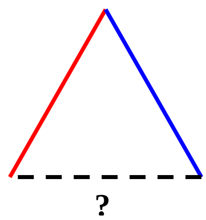
اگر m کبوتر و n لانه وجود دارد. در صورتی که تعداد کبوتر ها بیش از تعداد لانه ها باشد ($m>n$) و همه‌ی کبوتر ها درون لانه قرار بگیرند. در این صورت لانه ای وجود دارد که حداقل ۲ کبوتر در آن قرار دارد.



نتیجه : اگر m کبوتر و n لانه وجود دارد. در صورتی که تعداد کبوتر ها بیش از تعداد لانه ها باشد ($m>n$) و همه‌ی کبوتر ها درون لانه قرار بگیرند. در این صورت حداقل یک لانه وجود خواهد داشت که حاوی بیش از یک کبوتر است.

مثال : نشان دهید که اگر بخواهیم ضلع های یک مثلث را با دو رنگ آبی یا قرمز رنگ کنیم، حداقل دو ضلع این مثلث همرنگ خواهند شد.

حل : اگر ضلع های مثلث را کبوتر و دو رنگ آبی و قرمز را لانه فرض کنیم. چون ۲ < ۳ پس طبق اصل لانه کبوتری و با توجه به تقسیم زیر ، در یکی از لانه ها حداقل ۲ کبوتر قرار خواهد گرفت (دو کبوتر در یک لانه، معادل است با دو ضلع با یک رنگ)



۳ | ۲
۲ | ۱
۱

۱+۱=۲

مثال : ۸ نفر در یک میهمانی شرکت کرده اند، ثابت کنید که حداقل ۲ نفر از آنها در یک روز هفته متولد شده اند.

حل: می دانیم که هر هفته ۷ روز است، اگر میهمانان را به منزله‌ی کبوتر و روز های هفته را به منزله‌ی لانه در نظر بگیریم وچون ۸ < ۷ پس با توجه به تقسیم زیر و با در نظر گرفتن اصل لانه کبوتری حداقل ۲ نفر در یک روز هفته متولد شده اند.

$$\begin{array}{r|l} ۸ & ۷ \\ \cline{2-2} \underline{۷} & ۱ \\ ۱ & \end{array}$$

۱+۱=۲

مثال : ثابت کنید در بین ۵ عدد طبیعی دلخواه، حداقل دو عدد یافت می شود که در تقسیم بر ۴ هم باقی مانده باشند.

حل: اگر این ۵ عدد طبیعی را به منزله‌ی ۵ کبوتر و اعضای مجموعه‌ی باقی مانده های تقسیم بر۴ را لانه فرض می کنیم. چون ۵ < ۴ پس طبق اصل لانه کبوتر و با توجه به تقسیم زیر واضح است که حداقل دو عدد از ان پنج عدد دلخواه دارای باقی مانده‌ی برابر خواهند بود.

$$\begin{array}{r|l} ۵ & ۴ \\ \cline{2-2} \underline{۴} & ۱ \\ ۱ & \end{array}$$

۱+۱=۲

توجه: مجموعه‌ی باقی مانده های تقسیم اعداد صحیح بر عدد ۴ می شود.

{۰,۱,۲,۳}

مثال : ثابت کنید که اگر S یک زیر مجموعه‌ی ۷ عضوی از اعداد طبیعی باشد و اگر اعضای S را بر عدد ۶ تقسیم کنیم، حداقل دو عضو از این مجموعه دارای باقی مانده‌ی یکسان خواهند بود.

حل: اعضای مجموعه‌ی S را به منزله‌ی کبوتر واعضای مجموعه‌ی باقی مانده های تقسیم بر۶ را لانه فرض می کنیم. چون ۷ < ۶ پس طبق اصل لانه کبوتر و با توجه به تقسیم زیر واضح است که حداقل دو عضو از مجموعه‌ی S دارای باقی مانده‌ی برابر خواهند بود.

$$\begin{array}{r|l} ۷ & ۶ \\ \cline{2-2} \underline{۶} & ۱ \\ ۱ & \end{array}$$

۱+۱=۲

توجه: مجموعه‌ی باقی مانده های تقسیم اعداد صحیح بر عدد ۶ می شود.

{۰,۱,۲,۳,۴,۵}

نتیجه : از بین $n+۱$ عدد طبیعی دلخواه و بیشتر، حداقل دو عدد طبیعی یافت می شوند که تفاضل آنها بر ۲ بخش پذیر است. یعنی به پیمانه‌ی n هم نهشت هستند.) چرا؟

اثبات: اگر این $n+۱$ عدد طبیعی را به منزله‌ی $n+۱$ کبوتر و اعضای مجموعه‌ی باقی مانده های تقسیم بر n را لانه فرض می کنیم. چون $n+۱>n$ پس طبق اصل لانه کبوتر و با توجه به تقسیم زیر واضح است که حداقل دو عدد از میان پنج عدد دلخواه دارای باقی مانده‌ی برابر خواهند بود.

$$\begin{array}{r|l} n+۱ & n \\ \cline{2-2} \underline{n} & ۱ \\ ۱ & \end{array}$$

۱+۱=۲

مثال: پنج نقطه داخل مربعی به ضلع یک سانتی متر مفروض هستند،ثابت کنید حداقل فاصله‌ی دو نقطه از این پنج نقطه کمتر از $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است.

حل: اگر مربع را به چهار مربع به ضلع $\frac{۱}{۲}$ تقسیم کنیم و این چهار مربع را لانه و ۵ نقطه را کبوتر فرض کنیم ، چون $۵>۴$ پس طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو نقطه از این ۵ نقطه در یک مربع کوچک قرار می گیرند. حال طبق رابطه‌ی فیثاغورس داریم:

$$\begin{array}{r|l} ۵ & ۴ \\ \cline{2-2} \underline{۴} & ۱ \\ ۱ & \end{array}$$

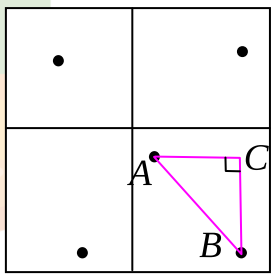
۱+۱=۲

$$\begin{cases} AB^۲ = AC^۲ + BC^۲ \\ AC < \frac{۱}{۲} \to AC^۲ < \frac{۱}{۴} \\ BC < \frac{۱}{۲} \to BC^۲ < \frac{۱}{۴} \end{cases}$$

$$\to AC^۲ + BC^۲ < \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴} \to AB^۲ < \frac{۱}{۲} \to AB < \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$\frac{۱}{۲}$

$\frac{۱}{۲}$



$\frac{۱}{۲}$ $\frac{۱}{۲}$

یعنی حداقل دو نقطه وجود دارد که فاصله‌ی آنها کمتر از $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است.

مثال : پنج نقطه در صفحه با مختصات صحیح در نظر بگیریم. ثابت کنید حداقل دو نقطه از این پنج نقطه وجود دارد، طوری که مختصات نقطه ی وسط این دو نقطه نیز عدد صحیح می باشد.

حل : پنج نقطه با مختصات صحیح را به عنوان کبوتر معرفی می کنیم. برای هر نقطه با مختصات صحیح یکی از چهار حالت **(زوج و زوج)** و **(زوج و فرد)** و **(فرد و زوج)** و **(فرد و فرد)** وجود دارد. حال

اگر این چهار حالت را به عنوان لانه در نظر بگیریم. طبق اصل لانه کبوتری و با توجه به تقسیم مقابل، دو کبوتر در یک لانه جای می گیرند.

لذا حداقل دو نقطه از آن نقاط از نظر زوج یا فرد بودن مختصات شبیه هم خواهند بود. پس مجموع طول های آنها زوج و نیز مجموع عرض های آنها نیز زوج است. در نتیجه مختصات نقطه‌ی وسط آنها صحیح خواهد شد.

مثال : مجموعه‌ی اعداد $A=\{۱,۵,۹,۱۳,\dots,۷۷,۸۱,۸۵\}$ را که به صورت یک دنباله‌ی عددی مرتب شده اند. در نظر می گیریم. اگر از این مجموعه ۱۳ عضو انتخاب کنیم. نشان دهید که حداقل ۲ عدد در این ۱۳ عدد وجود دارد که مجموعشان برابر ۹۰ باشد.

حل : مجموعه‌ی A را به ۱۲ زیر مجموعه، به شکل زیر افراز می کنیم.

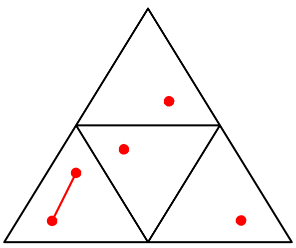
$A_{۱}=\{۵,۸۵\}$	$A_{۵}=\{۲۱,۶۹\}$	$A_{۹}=\{۳۷,۵۳\}$
$A_{۲}=\{۹,۸۱\}$	$A_{۶}=\{۲۵,۶۵\}$	$A_{۱۰}=\{۴۱,۴۹\}$
$A_{۳}=\{۱۳,۷۷\}$	$A_{۷}=\{۲۹,۶۱\}$	$A_{۱۱}=\{۴۵\}$
$A_{۴}=\{۱۷,۷۳\}$	$A_{۸}=\{۳۳,۵۷\}$	$A_{۱۲}=\{۱\}$

همانطور که مشاهده می شود، مجموع اعداد درون زیر مجموعه های دو عضوی برابر ۹۰ است. زیر مجموعه های فوق را به عنوان ۱۲ لانه در نظر می گیریم که می خواهیم ۱۳ کبوتر از درون آنها انتخاب کنیم، طبق اصل لانه کبوتری حداقل از یکی از لانه ها ۲ کبوتر انتخاب خواهد شد. یعنی حداقل دو عدد انتخاب شده از یک زیر مجموعه هستند. لذا مجموع آنها برابر ۹۰ است.

مثال : پنج نقطه از داخل مثلثی متساوی الاضلاع به طول ضلع ۲ ، انتخاب کنیم. ثابت کنید که حداقل ۲ نقطه از آنها فاصله شان کمتر از ۱ است.

حل : کافی است ابتدا مطابق شکل، مثلث مفروض را به ۴ مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع ۱ تقسیم بندی کنیم. حال اگر نقاط را کبوتر و مثلث های کوچک را لانه فرض کنیم، طبق اصل لانه کبوتری و با توجه به تقسیم مقابل معلوم می شود که دست کم دو نقطه از این ۵ نقطه در یک مثلث کوچک قرار می گیرند و فاصله‌ی این دو نقطه کمتر از ۱ خواهد شد.

۵ | ۴
۴ | ۱
۱
۱+۱=۲



مثال : نشان دهید در هر گراف ساده از مرتبه‌ی $p \geq ۲$ حداقل دو رأس هم درجه وجود دارد.

حل : اگر مجموعه‌ی رأس ها را کبوتر و مجموعه‌ی یالها را لانه فرض کنیم. چون گراف ساده است،(در صورتی که گراف رأس منفرد نداشته باشد) پس از هر رأس حداکثر $p-۱$ یال می گذرد. از طرفی چون $p > p-۱$ ، پس طبق اصل لانه کبوتری و با توجه به تقسیم زیر واضح است که حداقل از دو رأس یالهای برابر می گذرد، یعنی درجه‌ی یکسان دارند.

$$\begin{array}{r|l} p & p-۱ \\ \hline p-۱ & ۱ \\ \hline ۱ & \end{array}$$

۱+۱=۲

توجه : اگر گراف دارای یک رأس منفرد باشد. تعداد کبوتر ها $p-۱$ و تعداد یالها $p-۲$ خواهد شد و مسئله به همان شکل اثبات می گردد. به همین ترتین برای ۲ رأس منفرد یا بیشتر می توان استدلال کرد.

***

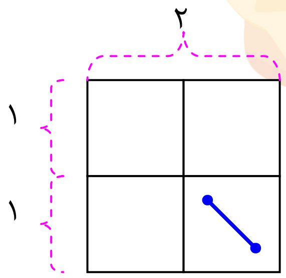
تمرین برای حل :

۱۱: ثابت کنید که اگر۱۰ نقطه‌ی دلخواه از داخل یک مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع۳ واحد را اختیار کنیم. حداقل ۲ نقطه بین این نقاط وجود خواهد داشت به قسمی که فاصله آنها کمتر از یک باشد.

۱۲: نشان دهید، در یک خانواده‌ی حداقل ۵ نفری ، دست کم دو نفر فصل تولدشان یکی است.

۱۳: ثابت کنید که در بین هر سه عدد طبیعی حداقل دو عدد طبیعی وجود دارد که مجموعشان عددی زوج است. (راهنمایی: از باقی مانده‌ی تقسیم بر ۲ استفاده کنید.)

۱۴: با توجه به شکل مقابل یک مسئله طرح کنید و با استفاده از اصل لانه کبوتری به آن پاسخ دهید.



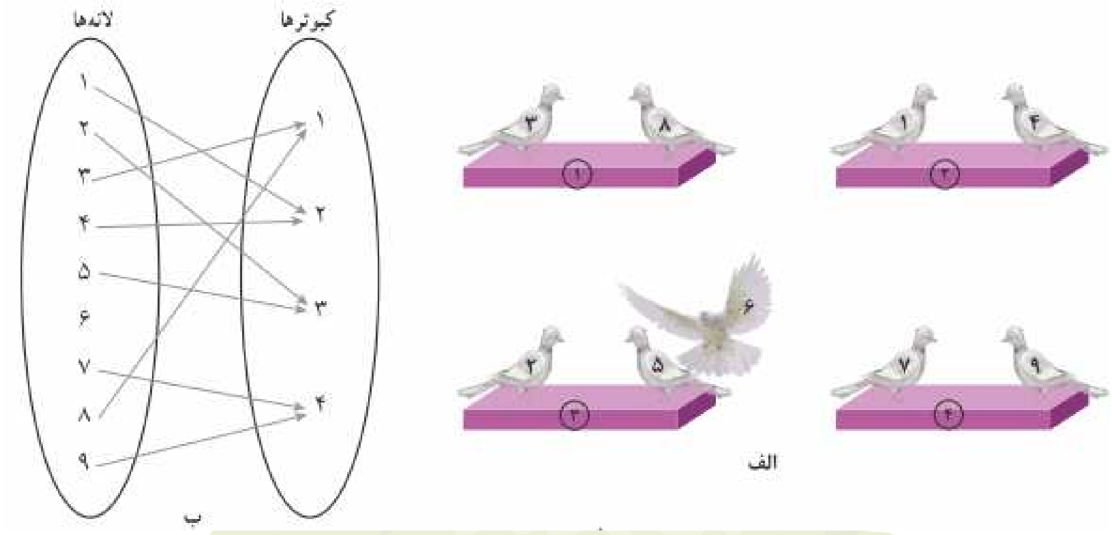
۱۵: نشان دهید در هر کلاس با n دانش آموز ($n \geq ۲$) حداقل ۲ دانش آموز یافت می شوند که تعداد دوستان آنها در آن کلاس با هم برابر است. (راهنمایی : هر یک از دانش اموزان را یک رأس گراف و رابطه‌ی دوستی بین هر دو دانش آموز را با یالی بین رأس های متناظرشان فرض کنید.)

۱۶: حداقل چند نقطه از داخل مثلثی متساوی الاضلاع به طول ضلع ۲ ، انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم حداقل ۲ نقطه از آنها فاصله شان کمتر از ۱ است؟

تعمیم اصل لانه کبوتری

اصل لانه کبوتری را می توان به صورت زیر تعمیم داد.

هرگاه $kn+1$ کبوتر یا بیشتر در n لانه قرار بگیرند. در این صورت لانه ای وجود دارد که حداقل $k+1$ کبوتر در آن قرار گرفته است.



مثال : از ۱۸ نفردانش آموز یک کلاس ثابت کنید که حداقل ۳ نفر از آنها در یک روز هفته متولد شده اند.

حل: می دانیم که هر هفته ۷ روز است، اگر دانش آموزان را به منزله‌ی کبوتر و روز های هفته را به منزله‌ی لانه در نظر بگیریم وچون $18 > 7$ پس با توجه به تقسیم زیر و با در نظر گرفتن اصل لانه کبوتری حداقل ۳ نفر در یک روز هفته متولد شده اند.

$$\begin{array}{r|l} ۱۸ & ۷ \\ \hline \underline{۱۴} & ۲ \\ ۴ & \end{array}$$

۲+۱=۳

مثال : از ۴۰۰ دانش آموز یک مدرسه، حداقل چند نفر در یک ماه سال متولد شده اند؟چرا؟

حل: می دانیم که هر سال۱۲ماه است، اگر دانش آموزان را به منزله‌ی کبوتر و ماه های سال را به منزله‌ی لانه در نظر بگیریم وچون $400 > 12$ پس با توجه به تقسیم زیر و با در نظر گرفتن اصل لانه کبوتری حداقل ۳۴ نفر در یک ماه سال متولد شده اند.

$$\begin{array}{r|l} ۴۰۰ & ۱۲ \\ \hline \underline{۳۹۶} & ۳۳ \\ ۴ & \end{array}$$

۳۳+۱=۳۴

مثال : نشان دهید هر زیر مجموعه از مجموعه‌ی $S=\{1,2,3,...,9\}$ که دارای ۶ عضو باشد، حداقل دو عضو داردکه مجموع آنها برابر ۱۰ است.

حل: هر یک از مجموعه های $\{۴,۶\}$و $\{۳,۷\}$و $\{۲,۸\}$و $\{۱,۹\}$ (مجموع هر دو عضوآنها برابر۱۰ است.) را به منزله‌ی لانه و هر یک از اعضاء زیر مجموعه های۶ عضوی را کبوتر فرض می کنیم. چون $۴ < ۶$ پس طبق اصل لانه کبوتری و مطابق تقسیم مقابل حداقل ۲ عضو از مجموعه‌ی۶ عضوی مجموع هر دوی آنها برابر۱۰ است.

۶ | ۴
۴ | ۱
۲
۱+۱=۲

مثال : مجموعه‌ی اعداد $A=\{۱,۲,۳,...,۸۴\}$ را در نظر بگیرید و نشان دهید هر زیرمجموعه‌ی ۴۳ عضوی از A دارای حداقل ۲ عضو است که مجموعشان برابر ۸۵ باشد.

حل : اعداد مجموعه‌ی A در ۴۲ قفس به شکل زیر افراز می کنیم. (مجموع اعضای هر یک ۸۵)

$\{۴۲,۴۳\}$ و ..... و $\{۳,۸۲\}$و $\{۲,۸۳\}$ و $\{۱,۸۴\}$

قفس ها را به عنوان لانه ها و اعداد درون آنها را کبوتر در نظر می گیریم. به طوری که می خواهیم از این لانه ها ۴۳ کبوتر به عنوان یک زیر مجموعه‌ی۴۳ عضوی انتخاب کنیم.

طبق اصل لانه کبوتری، حداقل دو کبوتر از یک لانه برداشته خواهند شد، یعنی حداقل دو عدد در زیر مجموعه وجود دارند که مجموع آنها ۸۵ است.

مثال : در یک کلاس حداقل ۶ نفر در یک روز هفته متولد شده اند،کمترین تعداد دانش آموزان این کلاس را تعیین کنید.

حل: هر یک از دانش آموزان را کبوتر و هر یک از روز های هفته را لانه فرض می کنیم.با توجه به اصل لانه کبوتری و با توجه به تقسیم زیر حداقل تعداد دانش آموزان این کلاس ۳۶ نفر است.

x | ۷
۳۵ | ۵
۱
$۶-۱=۵$
$x=(۷\times۵)+۱=۳۶$

مثال : در یک دبیرستان، حداقل چند دانش آموز وجود داشته باشند تا مطمئن باشیم حداقل ۱۰ نفر از آنها ماه و روز هفته‌ی تولدشان یکی است؟

حل: هر یک از دانش آموزان را کبوتر و هر یک از ماه و روز های هفته‌ی سال را لانه $(۷\times۱۲=۸۴)$فرض می کنیم. با توجه به اصل لانه کبوتری و با توجه به

x | ۸۴
۷۵۶ | ۹
۱

تقسیم زیر حداقل تعداد دانش آموزان این دبیرستان باید ۷۵۷ نفر باشد.

$$۱۰-۱=۹$$

$$x=(۸۴\times ۹)+۱=۷۵۷$$

مثال : ۵۴ شاخه گل را حداکثر در چند گلدان قرار دهیم تا اطمینان داشته باشیم گلدانی هست که در آن حداقل ۵ شاخه گل قرار گرفته است؟

حل: هر یک از شاخه گل ها را کبوتر و هر یک از گلدان ها را لانه فرض می کنیم. با توجه به اصل لانه کبوتری و با توجه به تقسیم زیر حداکثر تعداد گلدان ها ۱۳ می باشد.

$$۵۴ \div x = ۴ \quad \text{باقیمانده } ۱$$

$$۵-۱=۴$$

$$۵۴=۴x+۱ \rightarrow ۴x=۵۳ \rightarrow x=\left[\frac{۵۳}{۴}\right]=۱۳$$

مثال : به تعداد ۵۰ ورزشکار مرد در رشته های فوتبال، والیبال و بسکتبال از شهرهای تهران، مشهد، اصفهان و بوشهر در یک اردوی ورزشی شرکت کرده اند. ثابت کنید حداقل ۵ ورزشکار هم رشته و هم شهری هستند.

حل: روش اوّل:

هر یک از ۵۰ ورزشکار را کبوتر و هر یک از رشته های ورزشی را لانه فرض می کنیم. چون ($۳<۵۰$) پس طبق اصل لانه کبوتری و با توجه به تقسیم زیر حداقل ۱۷ نفر هم رشته هستند.

$$۵۰ \div ۳ = ۱۶,\quad ۴۸,\quad \text{باقیمانده } ۲ \qquad ۱۶+۱=۱۷$$

حال هر یک از ۱۷ ورزشکار هم رشته را کبوتر و هر یک از شهر ها را لانه فرض می کنیم. چون ($۴<۱۷$) پس طبق اصل لانه کبوتری و با توجه به تقسیم زیر حداقل۵ نفر از ورزشکاران هم رشته، همشهری هستند.

$$۱۷ \div ۴ = ۴,\quad ۱۶,\quad \text{باقیمانده } ۱ \qquad ۴+۱=۵$$

روش دوّم:

هر یک از ۵۰ ورزشکار را کبوتر و هر یک از رشته – شهر های موجود ($۱۲=۴\times ۳$) را لانه فرض می کنیم. چون ($۱۲<۵۰$) پس طبق اصل لانه کبوتری و با توجه به تقسیم زیر حداقل ۵ نفر هم رشته و هم شهری هستند.

$$۵۰ \div ۱۲ = ۴,\quad ۴۸,\quad \text{باقیمانده } ۲ \qquad ۴+۱=۵$$

مثال : حداقل چند نفر در یک سالن همایش حضور داشته باشند، تا مطمئن باشیم حداقل۳ نفر از آنها دو حرف اوّل و دوّم فامیلشان غیر تکراری و مثل هم است؟ (فامیلی هایی مثل احمدیان و احترامی)

حل : تعداد حروف الفبای فارسی ۳۲ می باشد. پس برای حرف اوّل ۳۲ و برای حرف دوّم ۳۱ حالت داریم. طبق اصل ضرب $n=۳۲\times۳۱=۹۹۲$ حالت وجود دارد.

$$\begin{array}{r|l} x & ۹۹۲ \\ \hline ۱۹۸۴ & ۲ \\ \hline ۱ & \end{array}$$

$۳-۱=۲$

$x=(۲\times۹۹۲)+۱=۱۹۸۵$

حال اگر هر یک از افراد را کبوتر و هر یک از حالت ها را لانه فرض کنیم. با وجه به اصل لانه کبوتری و با توجه به تقسیم زیر حداقل تعداد افراد برای حضور در همایش برابر ۱۹۸۵ نفر خواهد بود.

مثال : در یک دبیرستان با ۲۵۵ دانش آموز، ثابت کنید حداقل ۴ نفر، هفته و ماه تولد یکسان دارند.

حل : هر یک از دانش آموزان را کبوتر و هر یک از هفته – ماه ها ($۸۴=۱۲\times۷$) را لانه فرض می کنیم. چون ($۲۵۵>۸۴$) پس طبق اصل لانه کبوتری و با توجه به تقسیم زیر، حداقل ۴ نفر هفته – ماه تولد آنها یکسان است.

$$\begin{array}{r|l} ۲۵۵ & ۸۴ \\ \hline ۲۵۲ & ۳ \\ \hline ۳ & ۳+۱=۴ \end{array}$$

تذکر:

۱ : اگر m تعداد کبوتر ها و n تعداد لانه ها و $m>n$ با توجه به اصل لانه کبوتری می توان گفت که دست کم یک لانه وجود دارد که در آن حداقل $\left[\frac{m}{n}\right]+۱$ کبوتر قرار می گیرد[۳].

۲ : اگر m تعداد کبوتر ها و n تعداد لانه ها و $m>n$ آنگاه حداقل در یک لانه بیش از $\left[\frac{m-۱}{n}\right]$ کبوتر قرار می گیرد.

***

تمرین برای حل :

۱۷ : پنج نقطه داخل مثلثی متساوی الاضلاع به ضلع ۲ قرار دارند.ثابت کنید دست کم دو نقطه وجود دارد که فاصله ی آنها کمتر از یک است.

۳ - نماد $[x]$ همان جزء صحیح x است.

۱۸ : ده نقطه داخل یک مربع به ضلع ۳ قرار دارند، ثابت کنید که دست کم دو نقطه وجود دارد که فاصله‌ی آنها کمتر از $\sqrt{۲}$ است.

۱۹ : هفت نقطه درون مستطیلی به ابعاد ۴ و۶ متر انتخاب می کنیم. ثابت کنید که حداقل ۲ نقطه از آنها فاصله ای کمتر از $۲\sqrt{۲}$ متر را دارند.

۲۰ : ثابت کنید که در بین ۳۶۸ نفر حداقل دو نفر هستند که در یک روز متولد شده اند.

۲۱ : ثابت کنید که اگر S یک زیر مجموعه‌ی ۹ عضوی از اعداد طبیعی باشد و اگر اعضای S را بر عدد ۴ تقسیم کنیم،دست کم سه عضو از این مجموعه دارای باقی مانده‌ی یکسان خواهند بود.

۲۲ : در یک آزمون ریاضی ۱۰۲۵ نفر شرکت کرده اند.آیا حداقل دو شرکت کننده یافت می شود که حرف اوّل نام و حرف اوّل نام خانوادگی آن ها به زبان فارسی یکسان باشد؟ چرا ؟

۲۳ : ثابت کنید اگر در یک دبیرستان حداقل ۵۰۵ دانش آموز مشغول به تحصیل باشند، لااقل ۷ نفر از آنها روزِ هفته و ماه تولدشان یکسان است.

۲۴ : حساب کنید که ، حداقل چند نفر در یک سالن ورزشی تماشای مسابقه‌ی کُشتی باشند تا مطمئن باشیم، لااقل ۲۰ نفر از آنها روز تولدشان یکسان است؟

۲۵ : ۱۳ نقطه درون یک مستطیل ۸×۶ قرار دارند. نشان دهید که حداقل ۲ نقطه از این۱۳ نقطه وجود دارد که فاصله‌ی آنها از هم، کمتر از $\sqrt{۸}$ باشد.