

گروه آموزشی کلاسیویج

Classwich.ir



مجموعه سوالات تستی

به صورت تفکیک شده از **تابع**

شامل ۳۰۰ سوال در ۸ مبحث

به همراه پاسخ تشریحی

تهیه کننده : عرفان خیامی



۱ اگر تابع $f = \{(2, 3a), (2, a-4), (a, 2), (\frac{b}{p}, a^2 - 10)\}$ وارون پذیر باشد، مقدار ab کدام است؟

- (۱) -2 (۲) -4
 (۳) -6 (۴) -8

۲ کدامیک از توابع زیر باشد تا f^2 یک تابع یک به یک باشد؟

- (۱) $\{(0, 0), (-2, 1), (2, 1)\}$ (۲) $\{(2, 2), (3, 3), (-5, -2)\}$
 (۳) $\{(-1, 4), (1, 2), (4, -1)\}$ (۴) $\{(3, -2), (-3, 2), (0, 0)\}$

۳ اگر رابطه $f = \{(3, 2), (a, 5), (3, a^2 - a), (b, 2), (-1, 4)\}$ تابع یک به یک باشد، نمودار تابع $g(x) = ax + b$ محور طولها را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

- (۱) $(3, 0)$ (۲) $(-\frac{3}{2}, 0)$
 (۳) $(-3, 0)$ (۴) $(\frac{3}{2}, 0)$

۴ کدامیک از توابع زیر وارون پذیر است؟

- (۱) $y = (x + 5)^2$ (۲) $y = 1 - |x - 1|$
 (۳) $y = x^2 - 6x + 9$ (۴) $y = \sqrt{x+2} - 3$

۵ توابع $f(x) = (x-1)|x|$ و $g(x) = |x-1| - 2x$ به ترتیب چگونه‌اند؟

- (۱) وارون پذیر - وارون پذیر (۲) وارون پذیر - وارون ناپذیر
 (۳) وارون ناپذیر - وارون پذیر (۴) وارون ناپذیر - وارون ناپذیر

۶ تابع $f(x) = (x-2)(x-4) + 2x$ در کدامیک از بازه‌های زیر یک به یک است؟

- (۱) $[0, 3]$ (۲) $[-1, 2]$
 (۳) $[1, 5]$ (۴) $[\frac{3}{p}, \frac{5}{p}]$

۷ به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، تابع $f(x) = |2x + a|$ در فاصله $[-1, 2]$ یک به یک است؟

- (۱) $\mathbb{R} - (-1, \frac{1}{p})$ (۲) $[-4, 2]$
 (۳) $\mathbb{R} - (-4, 2)$ (۴) $[-1, \frac{1}{p}]$

به ازای چه حدودی از a تابع $f(x) = ax + |x|$ یک به یک است؟

۸

$$(۱) -1 < a < 1$$

$$(۲) -1 \leq a \leq 1$$

$$(۳) a \leq -1 \text{ یا } a \geq 1$$

$$(۴) a < -1 \text{ یا } a > 1$$

۹ اگر تابع $f(x) = (a - 3)x^2 + 2x - 3$ بر روی \mathbb{R} یک به یک باشد، مقدار $af(3)$ کدام است؟

۹

$$(۱) ۱۲$$

$$(۲) -۱۲$$

$$(۳) -۸$$

$$(۴) ۹$$

۱۰ تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+2} & ; x \geq 7 \\ \frac{x}{3} + a & ; x < 6 \end{cases}$ یک به یک است. حداکثر مقدار a کدام است؟

۱۰

$$(۱) \text{ صفر}$$

$$(۲) ۱$$

$$(۳) ۲$$

$$(۴) ۳$$

۱۱ تابع دوضابطه ای $y = \begin{cases} x^2 - ax + b & ; x \leq 3 \\ -\sqrt{x+1} & ; x > 3 \end{cases}$ یک به یک است. حداقل مقدار $a + b$ کدام است؟

۱۱

$$(۱) ۱۳$$

$$(۲) ۱۴$$

$$(۳) ۱۷$$

$$(۴) ۱۸$$

۱۲ هرگاه f تابعی یک به یک باشد و $f(x + 2f(x)) = f(5x + 2)$ ، در این صورت نمودار تابع $y = f \circ f(x)$ محور y ها را با چه عرضی قطع می کند؟

۱۲

$$(۱) ۱$$

$$(۲) ۲$$

$$(۳) ۳$$

$$(۴) ۴$$

گزینه ۴

۱

نکته ۱: رابطه f که به صورت مجموعه‌ای از زوج مرتبها داده شده است در صورتی تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی داری مؤلفه اول برابر نباشد؛ به عبارت دیگر، اگر مؤلفه اول دو زوج مرتب برابر بود، باید مؤلفه‌های دوم آن‌ها هم برابر باشد.

نکته ۲: تابع f که به صورت مجموعه‌ای از زوج مرتبها داده شده است، در صورتی یک به یک است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی دارای مؤلفه دوم برابر نباشد؛ به عبارت دیگر، اگر مؤلفه‌های دوم دو زوج مرتب برابر بود، باید مؤلفه‌های اول آن‌ها هم برابر باشد.

$$\begin{cases} (2, 3a) \in f \\ (2, a-4) \in f \end{cases} \xrightarrow[\text{نکته ۱}]{f \text{ تابع است}} 3a = a - 4 \Rightarrow a = -2$$

پس:

$$f = \left\{ (2, -6), (-2, 2), \left(\frac{b}{2}, -6\right) \right\}$$

$$\begin{cases} (2, -6) \in f \\ \left(\frac{b}{2}, -6\right) \in f \end{cases} \xrightarrow[\text{نکته ۲}]{f \text{ یک به یک است}} \frac{b}{2} = 2 \Rightarrow b = 4$$

بنابراین:

$$ab = -8$$

گزینه دو ریاضی و فیزیک یازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۷

گزینه ۳

۲

 f^2 را برای هر یک از گزینه‌ها به دست می‌آوریم:

$$\text{گزینه ۱: } f^2 = \{(0, 0), (-2, 1), (2, 1)\}$$

$$\text{گزینه ۲: } f^2 = \{(2, 4), (3, 9), (-5, 4)\}$$

$$\text{گزینه ۳: } f^2 = \{(-1, 16), (1, 4), (4, 1)\}$$

$$\text{گزینه ۴: } f^2 = \{(3, 4), (-3, 4), (0, 0)\}$$

ملاحظه می‌شود فقط f^2 مربوط به گزینه ۳ شرایط یک به یک بودن را دارد.

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۴

رابطه‌ای تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی دارای مؤلفه‌های اول برابر نباشند.
باتوجه به زوج‌های مرتب $(۳, ۲)$ و $(۳, a^۲ - a)$ ، برای تابع بودن باید $a^۲ - a = ۲$ باشد:

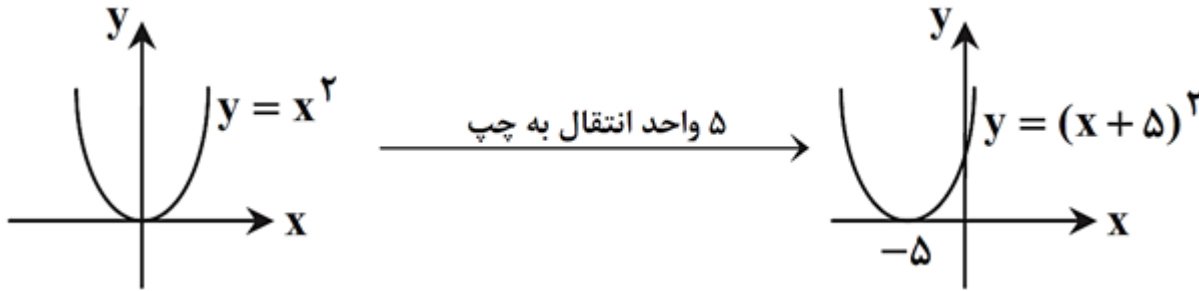
$$a^۲ - a - ۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \text{ق.ق} \ a = ۲ \\ \text{غ.ق.ق} \ a = -۱ \end{cases}$$

توجه کنید اگر $a = -۱$ باشد، دو زوج مرتب $(-۱, ۴)$ و $(-۱, ۵)$ عضو f خواهند بود که قابل قبول نیست، پس $a = ۲$ است.
برای یک‌به‌یک بودن در دو زوج مرتب $(b, ۲)$ و $(۳, ۲)$ ، باید $b = ۳$ باشد؛ پس:

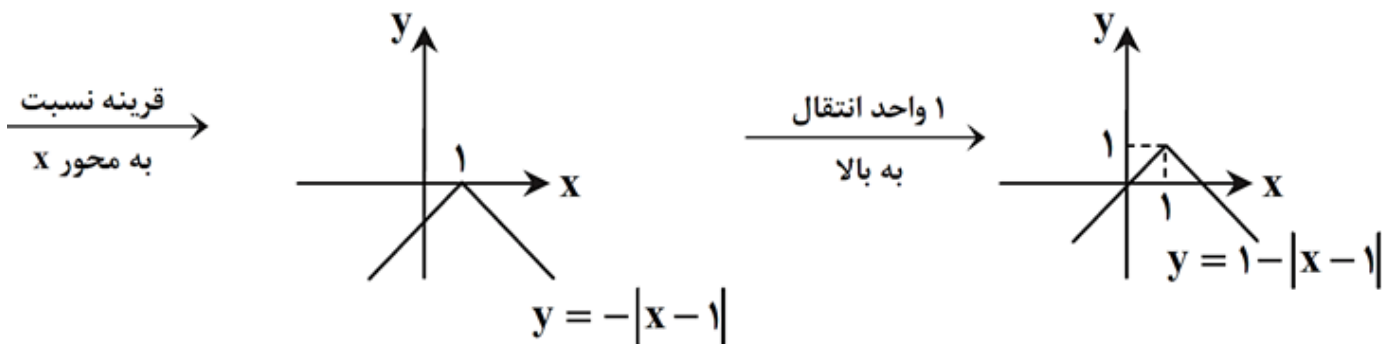
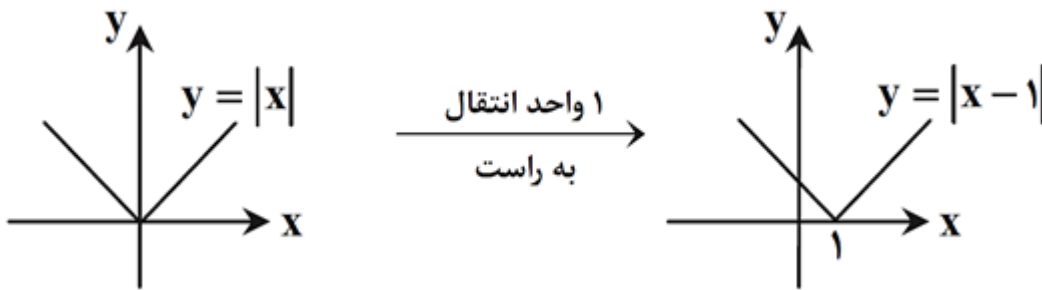
$$g(x) = ax + b = ۲x + ۳ \xrightarrow{y=۰} ۲x + ۳ = ۰ \Rightarrow x = -\frac{۳}{۲}$$

نکته: یک تابع در صورتی وارون پذیر است که یک به یک باشد.
 نکته: یک تابع در صورتی یک به یک است که هر خط موازی محور x ها، نمودار آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند.
 باتوجه به نکات بالا، نمودار هریک از گزینهها را رسم می کنیم.

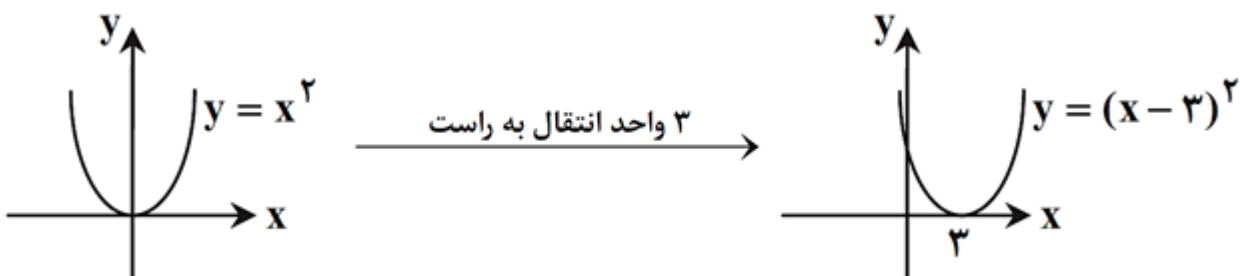
گزینه ۱: $y = (x + 5)^2$



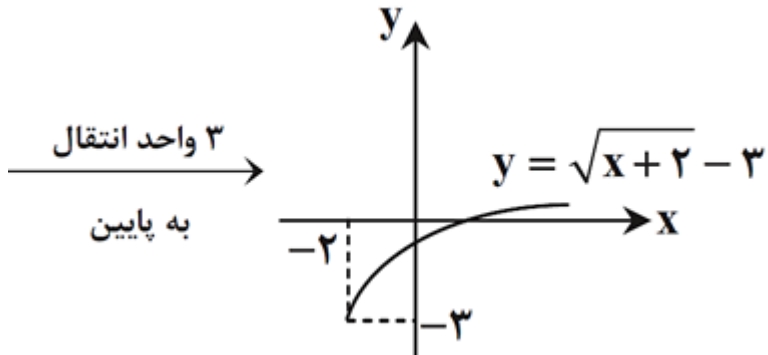
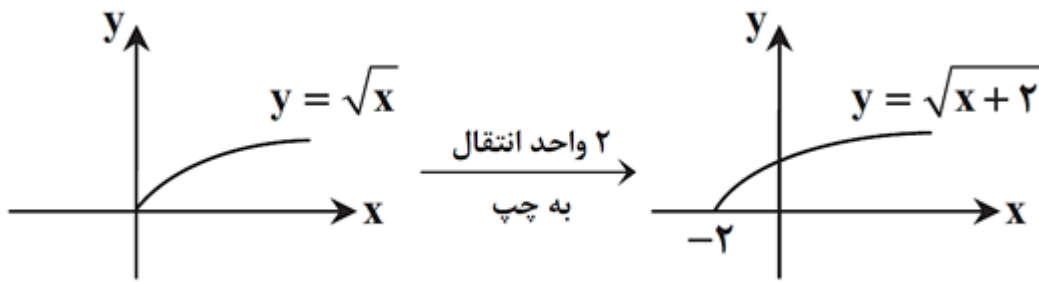
گزینه ۲: $y = 1 - |x - 1|$



گزینه ۳: $y = x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$



گزینه ۴: $y = \sqrt{x + 2} - 3$



باتوجه به نمودارها، واضح است که گزینه ۴ پاسخ است.

شرط وارون پذیری یک تابع، یک به یک بودن آن است؛ پس یک به یک بودن یا نبودن دو تابع را بررسی می‌کنیم.
تابع یک به یک تابعی است که به ازای ورودی‌های متمایز (x) ، خروجی‌های (y) یکسان ندهد. تابع $f(x)$ یک به یک نیست، زیرا:

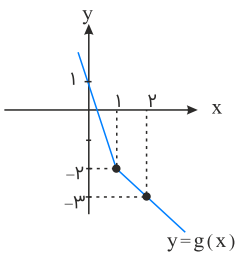
$$\begin{cases} x = 1 \Rightarrow f(1) = 0 \\ x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow (0, 0), (1, 0)$$

برای بررسی یک به یک بودن تابع $g(x)$ بهتر است نمودار آن را رسم کنیم. اول تابع را به صورت دو ضابطه‌ای می‌نویسیم و بعد نمودارش را رسم می‌کنیم.

$$g(x) = \begin{cases} (x-1) - 2x = \underbrace{-x-1}_{y_1} & ; x \geq 1 \\ -(x-1) - 2x = \underbrace{-3x+1}_{y_2} & ; x < 1 \end{cases}$$

x	۱	۲
y_1	-۲	-۳

x	۱	۰
y_2	-۲	۱

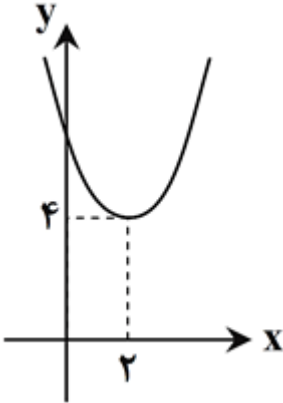


باتوجه به نمودار تابع $g(x)$ اگر هر خط موازی محور x ها رسم کنیم نمودار تابع را در یک نقطه قطع می‌کند، پس تابع $g(x)$ یک به یک است. در نتیجه f تابع وارون ناپذیر و g تابعی وارون پذیر است.

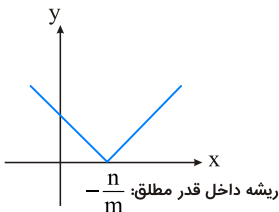
نکته: تابع $f(x)$ یک به یک است، اگر هر خط موازی محور x ها، نمودار آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند. ابتدا می‌توان نوشت:

$$f(x) = (x - 2)(x - 4) + 2x = x^2 - 6x + 8 + 2x = x^2 - 4x + 8 = (x - 2)^2 + 4$$

پس نمودار تابع $f(x)$ به شکل زیر است که با توجه به گزینه‌ها، تنها در بازه $[-1, 2]$ یک به یک است.



گزینه دو علوم تجربی یازدهم آزمون شماره ۴ ۱۳۹۷



دقت کنید که در نمودار تابع $f(x) = |mx + n|$ نقطه شکستگی نمودار تابع، ریشه داخل قدر مطلق است، پس: حال برای اینکه f تابعی یک به یک باشد، باید ریشه داخل قدر مطلق در فاصله $(-1, 2)$ نباشد، پس ابتدا حدود a را طوری می‌یابیم که ریشه در فاصله $(-1, 2)$ باشد سپس مجموعه جواب به دست آمده را از \mathbb{R} کم می‌کنیم:

$$2x + a = 0 \Rightarrow x = -\frac{a}{2} \Rightarrow -1 < -\frac{a}{2} < 2 \xrightarrow{\times(-2)} -4 < a < 2$$

پس مجموعه جواب مورد نظر برابر است با:

$$a \in \mathbb{R} - (-4, 2)$$

فلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۵ ۱۳۹۶

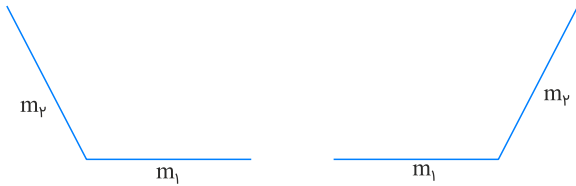
$$f(x) = \begin{cases} (a+1)x & ; x \geq 0 \Rightarrow m_1 = a+1 \\ (a-1)x & ; x < 0 \Rightarrow m_2 = a-1 \end{cases}$$

باتوجه به ضابطه به دست آمده در حالت‌های مختلف شیب‌ها، شکل‌های زیر به دست می‌آید.

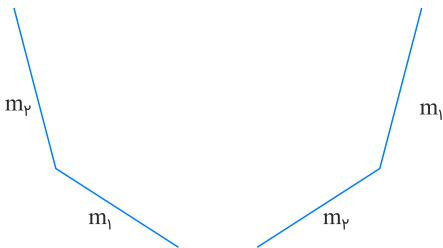
$$m_1 \cdot m_2 < 0 :$$



$$m_1 \cdot m_2 = 0$$



$$m_1 \cdot m_2 > 0 :$$



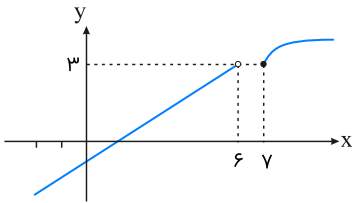
باتوجه به شکل‌های رسم شده، تابع زمانی یک‌به‌یک است که $m_1 m_2 > 0$ ، پس:

$$(a+1)(a-1) > 0 \Rightarrow a > 1 \text{ یا } a < -1$$

ابتدا توجه کنید که هیچ تابع درجه‌دومی (سه‌می شکل) بر روی \mathbb{R} یک‌به‌یک نیست، پس می‌توان نتیجه گرفت $a - 3 = 0$ یعنی $a = 3$ ، بنابراین داریم:

$$f(x) = 2x - 3 \Rightarrow af(3) = 3(6 - 3) = 9$$

نمودار تابع $y = \sqrt{x+2}$ به ازای $x \geq 7$ به صورت زیر است.



حال باید مقدار ضابطه پایینی تابع حداکثر ۳ شود که این مقدار حداکثر باید به ازای $x = 6$ به دست آید؛ بنابراین:

$$2 + a \leq 3 \Rightarrow a \leq 1 \Rightarrow \max(a) = 1$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۶

به ازای $x > 3$ ، ضابطه تابع، مربوط به تابعی نزولی و یک‌به‌یک است. برای اینکه به ازای $x \leq 3$ نیز تابع یک‌به‌یک باشد، لازم است رأس سهمی یعنی $x = \frac{a}{3}$ ، قبل از ۳ نباشد، یعنی:

$$\frac{a}{3} \geq 3 \Rightarrow a \geq 9$$

شرط دیگر برای یک‌به‌یک بودن تابع این است که مقدار تابع در $x = 3$ از حد راست تابع در $x = 3$ ، بزرگ‌تر یا مساوی باشد، یعنی:

$$9 - 3a + b \geq -2 \Rightarrow b \geq 3a - 11$$

به ازای $a = 6$ و $b = 7$ ، مقادیر a و b کمترین مقدار خود را خواهند داشت و کمترین مقدار $a + b$ برابر ۱۳ می‌شود.

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۱۹ ۱۳۹۵

باتوجه به اینکه تابع f یک‌به‌یک است، داریم:

$$x + 2f(x) = 5x + 2 \Rightarrow 2f(x) = 5x + 2 - x \Rightarrow 2f(x) = 4x + 2$$

$$\Rightarrow 2f(x) = 2(2x + 1) \Rightarrow f(x) = 2x + 1$$

$$\Rightarrow fof(x) = f(f(x)) = 2f(x) + 1 = 2(2x + 1) + 1 = 4x + 3$$

$$\xrightarrow{\text{نقطه تلاقی با محور } y} x = 0 \Rightarrow fof(0) = 4(0) + 3 = 3$$

قلمچی ریاضی و فیزیک چهارم آزمون شماره ۹ ۱۳۹۷